PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 13. 1. Juli 1918. Redaktionsschluß für No. 15 am 26. Juni 1918. 19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

B. Walter, Über die Ermittelung der zeitlichen Aufeinanderfolge zusammengehöriger Blitze sowie über ein bemerkenswertes Beispiel dieser Art von Entladungen. S. 273.

J. Parankiewicz, Ein neuerlicher Beweis für die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur des Stokesschen Widerstandsgesetzes. S. 280.

K. Fehrle, Über den Zusammenhang zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente, dem spezifischen Gewicht und der Wärmetönung. S. 281.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

O. Deutschland, Über die Anordnung der Fixsterne im Raum. S. 286.

Besprechungen:

F. Kühnen, Das Mittelwasser der Ostsee und der Nordsee. S. 296.

Tagesereignisse. S. 296.

Personalien. S. 296.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Ermittelung der zeitlichen Aufeinanderfolge zusammengehöriger Blitze sowie über ein bemerkenswertes Beispiel dieser Art von Entladungen.

Von B. Walter.

Mit Tafel VIII.

Als zusammengehörige Blitze habe ich solche Blitze bezeichnet, welche zwar in räumlich vollkommen selbständigen Bahnen verlaufen, zwischen denen aber doch ein bestimmter elektrischer Zusammenhang besteht[1]). Daß es nämlich derartige Blitze tatsächlich gibt, hatte ich a. a. O. schon daraus geschlossen, daß man fast bei jedem größeren Gewitter Entladungen beobachten könne, die zwar räumlich vollkommen getrennt voneinander verlaufen, zeitlich aber doch in so kurzem Zwischenraum aufeinander folgen, daß der Beobachter sofort auf den Gedanken kommen muß, daß die eine von ihnen durch die andere ausgelöst wurde, wie es ja auch aus elektrischen Gründen nicht unwahrscheinlich ist[2]).

Solche Blitze, deren Zusammengehörigkeit sich schon durch direkte Beobachtung feststellen läßt, treten nun allerdings meist an ziemlich weit voneinander entfernten Stellen des Himmels auf, so daß sich die Ermittlung ihres zeitlichen Zusammenhangs durch das weiter unten zu beschreibende, 1910 von mir zuerst benutzte Verfahren ziemlich schwierig gestaltet und mir auch bisher nur in einem Falle gelungen ist[3]). Dagegen ergab sich bei meinen daraufhin gerichteten Bemühungen unerwarteterweise noch eine andere Art der Zusammengehörigkeit von Blitzen, die nämlich darin besteht, daß mehr oder weniger gleichzeitig mit einem starken, zur Erde gehenden Blitz von zahlreichen andern Stellen derselben Wolke aus mehrere vom ersteren vollkommen getrennt verlaufende kleinere Blitze ausgehen, von denen einige wohl ebenfalls die Erde erreichen, die meisten aber nur aus frei in der Luft endigenden Büschelentladungen bestehen, so daß es sich also bei ihnen nach der früher von mir gegebenen Aufklärung über die Entstehungsweise der Blitzbahn sozusagen nur um Vorentladungen mehr oder weniger fertig gewordener Blitze handelt. Ein recht bezeichnendes Beispiel einer solchen Gruppe zusammengehöriger Blitze konnte ich schon 1910 a. a. O. veröffentlichen; ein zweites, noch lehrreicheres Beispiel dieser Art soll ferner hier beschrieben werden, nachdem zuvor noch die Theorie des von mir zur Ermittlung des zeitlichen Zusammenhangs derartiger Entladungen benutzten Verfahrens gegeben worden ist.

Das Wesentliche besteht darin, eine solche Gruppe zusammengehöriger Blitze zugleich mit zwei photographischen Apparaten aufzunehmen, von denen der eine fest aufgestellt ist, während der andere durch ein Uhrwerk mit bekannter Geschwindigkeit gedreht wird, wie ich dies zuerst in dieser Zeitschrift **3**, 168, 1902 beschrieben habe. Es ist nämlich klar, daß der Zeitabstand zweier räumlich vollkommen getrennt voneinander verlaufender Entladungen niemals durch eine Aufnahme allein ermittelt werden kann, auch wenn diese mit bewegter Kamera gemacht wurde; denn auch die bewegte Platte gibt uns nur über den Zusammenhang der Vorgänge in einer und derselben Blitzbahn, nicht aber über den in zwei vollständig getrennten Bahnen Auskunft. Ein solcher Zusammenhang ist dagegen leicht zu ermitteln, wenn man die beiden Blitze sowohl mit einer ruhenden als auch mit einer mit bekannter Geschwindigkeit und um eine passende Achse gedrehten Kamera eingefangen hat.

Die Theorie des Verfahrens gestaltet sich besonders einfach, wenn die optische Achse OS^* (Fig. 1) der gedrehten Kamera bei ihrer Dre-

1) B. Walter, Jahrb. d. Hamb. wiss. Anst. Bd. 27, Beiheft 5, 1910.

2) Siehe darüber B. Walter, Jahrb. d. Hamb. wiss. Anst. Bd. 20, 1902 und Ann. d. Phys. **10**, 393, 1903.

3) B. Walter, diese Zeitschr. **13**, 1082, 1912.

Fig. 1.

hung mit der der feststehenden OS' stets in derselben Ebene bleibt, und wenn man auch in den erhaltenen Bildern nur solche Punkte P_1 und P_2 der beiden fraglichen Blitze in Betracht zieht, welche ebenfalls in der genannten Ebene lagen. Denken wir uns nämlich in unserer Figur die Objektive der beiden Apparate in O zusammenfallend und ferner, um die lästige Bildumkehrung, die ja bei der photographischen Abbildung stattfindet, zu umgehen, statt der hinter O im Abstande der Brennweiten stehenden photographischen Platten vor O in denselben Abständen, d. h. also in den Entfernungen $OS' = f'$ und $OS'' = f''$, die Positivabdrücke davon aufgestellt (ausgezogene Linien), so werden zunächst P_1' und P_2' die Bilder der beiden Punkte P_1 und P_2 in der feststehenden Kamera darstellen. Nennen wir ferner $S'P_1' = x_1'$; $S'P_2' = x_2'$, $\sphericalangle S'OP_1' = \alpha_1'$ und $\sphericalangle S'OP_2' = \alpha_2'$, so wird

$$\Delta\alpha' = \alpha_1' - \alpha_2' = \operatorname{arctg}\frac{x_1'}{f'} - \operatorname{arctg}\frac{x_2'}{f'} . \quad (1')$$

Die Größe $\Delta\alpha'$ stellt nun den Winkel dar, unter welchem die beiden Punkte P_1 und P_2 von dem Aufnahmeorte aus erscheinen; und dieser Winkel ergibt sich aus der Lage der beiden Bildpunkte P_1' und P_2' des feststehenden Apparates stets in derselben Größe, gleichviel ob die beiden Blitze gleichzeitig oder nacheinander stattfanden. Anders dagegen verhält es sich in dieser Beziehung mit der Abbildung der beiden Punkte P_1 und P_2 in der bewegten Kamera; denn wenn OS'' und $O\Sigma''$ die Lagen der optischen Achse der letzteren in den beiden Augenblicken darstellen, wo bzw. die durch P_1 und P_2 gehenden Blitze stattfanden, so wird das Bild von P_1 in dieser Kamera nach P_1'', das von P_2 dagegen nicht nach P_2'', sondern nach Π_2'' fallen, da sich ja die Bildebene inzwischen von $S''P_1''$ nach $\Sigma''\Pi_1''$ gedreht hat. Bezeichnen wir daher auch hier wie in der feststehenden Kamera die Koordinaten $\Sigma''\Pi_1''$ und $\Sigma'''\Pi_2''$ der beiden Bildpunkte Π_1'' und Π_2'' der bewegten Platte bzw. mit x_1'' und x_2'' und die zugehörigen Objektivwinkel $\Sigma''O\Pi_1''$ und $\Sigma''O\Pi_2''$ bzw. mit α_1'' und α_2'', so daß also auch hier

$$\Delta\alpha'' = \alpha_1'' - \alpha_2'' = \operatorname{arctg}\frac{x_1''}{f''} - \operatorname{arctg}\frac{x_2''}{f''} \quad (1'')$$

wird, so wird jetzt $\Delta\alpha''$ nicht mehr den Winkel darstellen, unter welchem die beiden Punkte P_1 und P_2 vom Aufnahmeorte aus erscheinen, d. h. nicht mehr gleich $\Delta\alpha'$ sein, sondern wie die Fig. 1 zeigt, um den $\sphericalangle P_1''O\Pi_1'' = S''O\Sigma''$, um welchen die Kamera sich in der Zeit Δt zwischen dem Auftreten der beiden Blitze gedreht hat, größer. Nennen wir also w die Winkelgeschwindigkeit der Kamera, so ist $\Delta\alpha'' = \Delta\alpha' + w\,\Delta t$ und mithin

$$\Delta t = \frac{\Delta\alpha'' - \Delta\alpha'}{w} . \quad (2)$$

Die hier abgeleiteten Formeln gelten für jeden beliebigen Abstand der beiden Blitze P_1 und P_2, und sie sind daher viel allgemeiner als die 1910 von mir a. a. O. gegebenen, die nämlich nur für sehr nahe beieinanderliegende Entladungen gültig waren. Hinsichtlich des Vorzeichens von Δt sei noch bemerkt, daß in dem Falle, wo die Drehung der bewegten Kamera im Sinne des in die Fig. 1 eingezeichneten Pfeiles erfolgt, ein positiver Wert von Δt die Bedeutung hat, daß die links gelegene Entladung P_2 später erfolgte als P_1. Dabei ist allerdings Voraussetzung, daß man die Größen x und α der Gleichungen 1 mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versieht, je nachdem sie in den Positivbildern der Fig. 1 rechts oder links von den optischen Achsen OS' bzw. $O\Sigma''$ liegen.

Ferner sei noch bemerkt, daß die obige Theorie auch den Fall zweier in derselben Bahnlinie zeitlich nacheinander erfolgender Teilentladungen eines Blitzes umfaßt; und zwar berechnet sich in diesem Falle, wo ja P_1 und P_2 zusammenfallen, d. h. $\Delta\alpha' = 0$ wird, das gesuchte Δt aus der Gleichung

$$\Delta t = \frac{\Delta\alpha''}{w} , \quad (2a)$$

so daß also dann lediglich das Bild der bewegten Kamera in Frage kommt.

Bevor wir nun aber die obige Theorie auf die bereits in der Einleitung angekündigte, in den Fig. 4 und 5 der Tafel VIII in 1,7facher linearer Vergrößerung wiedergegebene Doppelaufnahme anwenden, sei zunächst noch hervor-

gehoben, daß die dabei benutzte Methode der gleichzeitigen Aufnahme einer Blitzerscheinung auf ruhender und bewegter Platte auch schon deswegen von Bedeutung ist, weil die beiden so gewonnenen Bilder, wie ja auch der Vergleich der beiden Tafelbilder zeigt, sich auf das glücklichste ergänzen, insofern das mit der feststehenden Kamera aufgenommene Bild mehr die örtlichen und das mit dem bewegten Apparat erhaltene mehr die zeitlichen Verhältnisse der Blitze kennen lehrt.

Bei unserem Beispiel ersehen wir nun zunächst aus ersterem (Tafelfig. 4), daß hier aus der Gewitterwolke außer dem Hauptblitze noch eine große Zahl schwächerer Entladungen erfolgt ist, die zwar örtlich von ersterem vollkommen unabhängig verlaufen, zeitlich aber doch, wie wir sehen werden, mit ihm sämtlich in innigem Zusammenhang standen. Des einfacheren Ausdrucks wegen sind diese kleineren Blitze, soweit sie sich in beiden Aufnahmen wiederfinden, in den in den Textfiguren 2 und 3 gegebenen schematischen Nachzeichnungen des oberen Teiles der Tafelbilder durch arabische Ziffern gekennzeichnet, während die einzelnen Teilentladungen des Hauptblitzes in der Fig. 3 durch römische Zahlen unterschieden wurden.

In bezug auf diesen Hauptblitz zeigt nun zunächst das Bild der ruhenden Platte (Tafelfig. 4), daß er sich im oberen Teile seiner Bahnlinie in zwei Äste gegabelt hat, die beide bis zur Erde hinabreichten, so daß wir also hier den übrigens nicht so selten vorkommenden Fall vor uns haben, daß die Wolke sich von derselben Ausgangsstelle aus nach zwei verschiedenen Stellen der Erdoberfläche hin in beiderseits sehr kräftigen Schlägen entladet. Hinsichtlich der Entstehungsweise einer solchen verzweigten Entladung verweise ich auf meine angeführten Abhandlungen in den Annalen Bd. 10 und im Hamb. Jahrbuch Bd. 20, an welch letzterer Stelle übrigens auch schon ein Blitz dieser Art abgebildet wurde.

Fig. 2.

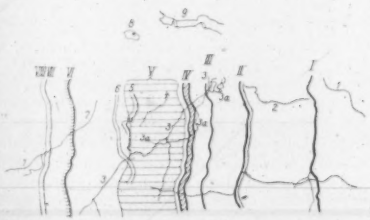

Fig. 3.

In unserem Fall zeigt nun ferner das Bild der bewegten Platte (Tafelfig. 3), daß die Entladungen der Wolke über die beiden Äste des Hauptblitzes — wie übrigens auch sonst stets — nicht gleichzeitig erfolgten, sondern nacheinander; und zwar hat bei unserem Blitz die Elektrizität zunächst den rechten Ast benutzt — der Verlauf der Zeit geht nämlich in der Fig. 3 von rechts nach links —, und es erfolgte ferner darnach auch über diesen Ast nur eine einzige, in der Textfig. 3 mit I bezeichnete Teilentladung, während die sämtlichen übrigen, in Fig. 3 mit II, III, ... bezeichneten Teilentladungen sich des linken Astes bedienten, wie aus der vollkommenen Übereinstimmung der Gestalt der Bahnlinien aller dieser Teilentladungen — untereinander sowohl wie auch mit der des linken Astes des ruhenden Bildes — hervorgeht. Der auf Grund der auf den Originalplatten gemessenen Größen x_1'' und x_2'' sowie der bekannten Werte von f'' und w nach den Gleichungen (1") und (2a) berechnete Zeitunterschied Δt zwischen diesen einzelnen Teilentladungen ist in der Tabelle I angegeben, aus der also auch folgt, daß die ganze Entladung 0,550 Sekunden gedauert hat. Der bei einigen der Teilentladungen an der Nummer derselben angehängte Index a soll bedeuten, daß dann der Beginn der betr. Entladung gemeint ist.

Tabelle I.

Zeitabstände Δt der Teilentladungen des Hauptblitzes.

	I—II	II—III	III—IVa	IVa—Va
$\Delta t =$	0,132	0,071	0,035	0,020 sec

	Va—VI	VI—VII	VII—VIII
$\Delta t =$	0,233	0,054	0,011 sec

Bemerkenswert ist ferner die höchst abwechselungsreiche Art der Teilentladungen unseres Blitzes, insofern sich nämlich darunter sowohl solche von zeitlich sehr kurzem als auch solche von verhältnismäßig langdauern-

dem Verlauf befinden. Der erstere Typus wird durch die Entladungen I, II, III und VII, der letztere durch V dargestellt, während IV, die übrigens noch für sich wieder aus vier, deutlich voneinander getrennten Teilentladungen besteht, sowie auch VI, die sich ebenfalls aus zwei solchen zusammensetzt, und endlich auch VIII einen mittleren Typus vertreten.

Dieser vielgestaltige zeitliche Verlauf der Teilentladungen ist in der Hauptsache wohl durch einen entsprechenden Verlauf der Bildung der Elektrizität in der Wolke zu erklären; und in diesem Zusammenhange sei hier auch noch auf die kurze Entladungspause hingewiesen, welche man in der Tafelfig. 5 zwischen den Teilentladungen IV und V sieht, eine Pause, die sich auch schon in vielen meiner früheren Blitzaufnahmen zeigte und von mir als eine „Erschöpfungspause" in der Bildung bzw. Nachlieferung der Wolkenelektrizität nach der Ausgangsstelle des Blitzes hin gedeutet wurde. Diese Auffassung erhält offenbar durch die jetzige Aufnahme noch eine besondere Bestätigung, insofern als die vier starken und schnell aufeinander folgenden Einzelentladungen der Teilentladung IV eine solche Erschöpfung sehr begreiflich erscheinen lassen. Die Dauer dieser Erschöpfungspause betrug hier 0,098 Sekunden.

Von der Landschaft, die ja in dem Bilde der ruhenden Platte klar und eindeutig hervortritt, zeigen sich die hervorstechendsten Teile — also vor allem der Kirchturm — auch in der bewegten Aufnahme, jedoch hier sämtlich in vierfacher Wiederholung. Dies erklärt sich natürlich so, daß hier nur die vier starken und zeitlich schroff abgerissenen Teilentladungen I, II, III und VI des Hauptblitzes ein deutliches Bild der Landschaft entwerfen konnten, und daß diese vier Bilder ferner, da sich ja die Platte inzwischen gedreht hatte, nach vier verschiedenen Stellen derselben hin fielen. Die Richtigkeit dieser Erklärung ergibt sich einfach daraus, daß sich der Zeitabstand der genannten Teilentladungen auch bis auf 0,001 Sekunden genau aus dem Abstand der betr. Kirchturmbilder ergibt.

Die Entfernung des Hauses, hinter dessen Dach der linke Ast des Hauptblitzes in den beiden Bildern verschwindet, und zu dem auch die in ihnen sichtbaren kleinen Schornsteine und die Telephonstange gehören, — vom Aufnahmeorte aus — betrug 117 m, die des über dem Dach sichtbaren Kirchturmes, der den rechten Ast des Hauptblitzes nach unten zu begrenzt, dagegen 860 m und die des in Tafelfig. 4 weiter rechts sichtbaren großen Fabrikschornsteins, der die unteren Teile des schwächeren, gleichfalls zur Erde gegangenen Blitzes dieses Bildes z. T. verdeckt, 220 m. Die Entfernung der Blitze selbst endlich war eine viel größere, nämlich etwa 7 km, was sich hier deswegen feststellen ließ, weil die Blitze in diesem Falle außer mit der bewegten Kamera gleichzeitig mit zwei im Abstande von 2 m voneinander aufgestellten feststehenden Apparaten aufgenommen worden waren, eine Aufnahmemethode, die ich schon vor einiger Zeit zwecks gleichzeitiger örtlicher und zeitlicher Analyse der Erscheinungen vorgeschlagen habe[1]). Das zweite feststehende Bild ist hier nicht mit veröffentlicht, weil es sich von dem in Tafelfig. 4 wiedergegebenen in keiner wesentlichen Hinsicht unterscheidet. Aus der angegebenen Entfernung des Hauptblitzes in Verbindung mit der Brennweite der Objektive (17,7 cm) berechnet sich ferner die Höhe der Gewitterwolke, da ihr Abstand vom Horizont auf den Originalplatten etwa 4,5 cm betrug, zu rund 1,8 km.

Was nun aber den elektrischen Zusammenhang der zahlreichen kleineren Blitze unserer Erscheinung — sowohl untereinander als auch mit dem Hauptblitze derselben — angeht, so zeigt schon der bloße Vergleich der schematischen Zeichnungen 2 und 3 des Textes, daß man in dieser Hinsicht zwei Gruppen zu unterscheiden hat, von denen die eine die Blitze 1, 3, 3a, 4 und 7 und die andere die Entladungen 2, 5, 6, 8 und 9 umfaßt. Die einzelnen Blitze einer jeden dieser beiden Gruppen haben nämlich in beiden Figuren zueinander ungefähr die gleiche Lage, während diejenigen der letztgenannten Gruppe gegenüber denjenigen der andern in Fig. 3 — im Vergleich zu Fig. 2 — sämtlich um ein beträchtliches Stück nach links verschoben sind. Die Bedeutung dieser Tatsachen ist offenbar die, daß einesteils die Blitze einer jeden dieser beiden Gruppen unter sich annähernd gleichzeitig und andernteils diejenigen der Gruppe 2, 5, ... erheblich später aufgetreten sind als diejenigen der Gruppe 1, 3, ...

Betrachten wir ferner den zeitlichen Zusammenhang einer jeden dieser beiden Blitzgruppen mit dem Hauptblitz unserer Aufnahmen, so zeigt uns wieder schon der Vergleich der Textfiguren 2 und 3, daß die Blitze 1, 3, ... in Fig. 3 ungefähr dieselbe Lage zur ersten Teilentladung des Hauptblitzes haben, wie in Fig. 2 zu dem Gesamtbild aller Teilentladungen des letzteren, während die Blitze 2, 5, ... in Fig. 3 annähernd gleich zur zweiten Teilentladung des Hauptblitzes gelegen sind wie in Fig. 2 zu dem ebengenannten Gesamtbild. Auch dies heißt nun offenbar wieder nichts anderes, als

1) B. Walter, diese Zeitschr. 13, 1082, 1912.

daß die Blitze 1, 3, ... sämtlich nahezu gleichzeitig mit der ersten und die Blitze 2, 5, ... sämtlich ungefähr gleichzeitig mit der zweiten Teilentladung des Hauptblitzes aufgetreten sein müssen.

Auf die Bedeutung aller dieser Tatsachen werden wir ferner durch die in der Tafelfig. 5 ebenfalls noch zu beobachtende Erscheinung hingewiesen, daß von allen Teilentladungen des Hauptblitzes nur die beiden ersten jene zahlreichen seitlichen Ausläufer haben, die, wie ich in meinen beiden angeführten Abhandlungen „Über die Entstehungsweise des Blitzes" (Ann. 10 u. Hamb. Jahrb. 20) bewiesen habe, in innigem Zusammenhang mit der Ausbildung der Bahnlinie einer solchen Entladung stehen, und zwar genügt es hier, darauf hinzuweisen, daß sie gewissermaßen als ein Wahrzeichen der Schwierigkeiten angesehen werden können, welche die Elektrizität bei der Bildung dieser Bahnlinie zu überwinden hatte.

Auf die einzelnen Teilentladungen des Hauptblitzes unserer Aufnahmen angewandt, heißt dies also, daß solche Schwierigkeiten nur bei den ersten beiden derselben bestanden haben, und dies ist auch leicht verständlich; denn nur bei diesen beiden Teilentladungen hatte sich ja die Elektrizität den Weg von der Wolke zur Erde neu zu bahnen, während dieser Weg für die Teilentladungen III—VIII bereits vorhanden war. Mit andern Worten kann man dies auch so ausdrücken, daß die Elektrizität der Wolke bei jeder der beiden Teilentladungen I und II einen erheblich größeren Widerstand zu überwinden hatte als bei III—VIII. Je größer nun aber der Widerstand eines solchen Entladungsweges, eine um so höhere Spannung ist erforderlich, um die Entladung über diesen Weg einzuleiten — man vergleiche in dieser Hinsicht z. B. den Unterschied zwischen einer harten und einer weichen Röntgenröhre —; und so kommen wir also zu dem Ergebnis, daß die Spannung der Gewitterwolke beim Auftreten der beiden Teilentladungen I und II jedesmal eine ganz erheblich viel höhere gewesen sein muß als bei dem der Entladungen III—VIII.

Diese höhere Spannung der Wolke erklärt es uns nun aber weiter auch, daß von den hier zur Erörterung stehenden kleinen Blitzen unserer Aufnahmen zwar wohl der eine Teil nahezu gleichzeitig mit der Teilentladung I und der andere Teil auch ungefähr gleichzeitig mit der Teilentladung II des Hauptblitzes, keiner aber zugleich mit den späteren Teilentladungen desselben stattfand; denn nur bei den ersteren beiden erreichte die Spannung der Gewitterwolke eine solche Höhe, daß sie nicht bloß in der Richtung des ja noch nicht fertigen Weges des Hauptblitzes, sondern auch nach vielen andern Seiten hin Blitze sprühte — grade so wie bei einer harten Röntgenröhre die zu ihrem Betriebe nötige hohe Spannung sich nicht bloß an ihren beiden Polen, sondern auch an der ganzen mit ihnen in Verbindung stehenden Drahtleitung durch starke Büschelentladungen bemerkbar macht.

Daraus ergibt sich dann aber weiter, daß das ganze Gebiet der Gewitterwolke, aus welchem alle diese kleinen und großen Blitze hervorgingen, in elektrischer Hinsicht eine einzige zusammenhängende und gut leitende Masse bildete, und zwar betrug die horizontale Ausdehnung dieser Masse sicher mehr als 1 km; denn schon der Abstand des kleinen Blitzes 7 von der Ausgangsstelle des Hauptblitzes betrug 800 bis 900 m, und es ist sehr wahrscheinlich, daß auch der in Tafelfig. 4 rechts neben letzterem sichtbare schwächere, gleichfalls zur Erde gegangene Blitz mit zu einer der beiden oben beschriebenen Gruppen der kleineren Blitze unserer Erscheinung gehörte, wenn dies hier allerdings auch deswegen nicht sicher bewiesen werden kann, weil er ja in der bewegten Kamera über den Rand der Platte hinaus gefallen ist.

Ein solches zeitliches Zusammenfallen mehrerer kleinerer, aber vollkommen selbständiger Blitze mit der „Anfangsentladung" eines starken ist übrigens, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, bereits i. J. 1910 von mir bei dem einen der a. a. O. veröffentlichten vier Paare von Doppelaufnahmen dieser Art nachgewiesen worden; während aber dort diese Erscheinung — entsprechend der einfacheren Beschaffenheit des Entladungsweges des Hauptblitzes — nur einmal, d. h. eben nur bei der Ausbildung der einen Bahnlinie desselben auftrat, haben wir es hier — wegen der zweimaligen Ausbildung eines solchen Weges für jeden der beiden Äste unseres Hauptblitzes — auch mit einem zweimaligen Auftreten der Erscheinung zu tun. Ja, genau genommen können wir hier sogar von einem dreimaligen Sprühen der Wolke reden, da nämlich die Teilentladung II des Hauptblitzes sowie auch die zu ihr gehörigen kleinen Blitze 5, 6 und 9 auf der bewegten Platte deutlich als doppelt, d. h. als je aus zwei, in sehr kurzen Zeitabständen aufeinander folgenden Entladungsstößen bestehend, erkannt werden können. Bei der Teilentladung II selbst handelt es sich nämlich hierbei um die in Tafelfig. 5 rechts neben ihrem oberen Teile deutlich sichtbare „Vorentladung", während bezüglich der Verdoppelung der kleinen Blitze 5, 6 und 9 auf die schematische Nachzeichnung derselben in der Textfig. 3 verwiesen werden muß, da diese schwachen Blitze bei der Reproduktion in der

Tafelfig. 5 kaum deutlich genug werden dürften. Bemerkenswert ist dabei allerdings, daß die Zeitabstände der beiden Stöße dieser vier Entladungen nur der Größenordnung nach, nicht aber vollkommen genau übereinstimmen; denn dieser Abstand betrug bei der Teilentladung II 0,0055 Sekunden und bei den Blitzen 5, 6 und 9 bzw. 0,0078, 0,0055 und 0,0043 Sekunden. Unterschiede, die nicht etwa auf Messungsfehler zurückgeführt werden können, da nämlich bei jeder der in Rede stehenden Entladungen ihre beiden Stöße auf der bewegten Platte dicht nebeneinander verlaufen und sich daher ihr Zeitunterschied mit einer viel größeren Genauigkeit bestimmen läßt als z. B. derjenige zwischen je einem der kleinen Blitze unserer Aufnahmen und der zugehörigen Teilentladung des großen.

Außer den genannten Unterschieden in den Zeitabständen zwischen ihren beiden Teilentladungen besteht übrigens ein weiterer Unterschied der drei kleinen Doppelblitze 5, 6 und 9 auch noch darin, daß bei 5 die erste Teilentladung erheblich kräftiger war als die zweite, während bei 6 und 9 beide Teilentladungen annähernd gleiche Stärke hatten.

Was sodann die Ermittlung der genaueren Zeitunterschiede zwischen den einzelnen Blitzen unserer jetzigen Aufnahmen angeht, so wurden zu diesem Zweck zunächst von den beiden Originalplatten mehrere Abdrücke auf Diapositivplatten gemacht, um an diesen die dazu nötigen Messungen anzustellen. Hierzu wurden in die Abdrücke zunächst die horizontale und die vertikale Mittellinie der Originalplatte eingezeichnet, um danach die x-Koordinaten der Bildpunkte P_1', P_2', H_1''' und H_2''' der Fig. 1 ermitteln zu können. Von diesen Koordinaten wurde die eine in jeder Platte einfach mit Hilfe eines gewöhnlichen Maßstabes bis auf 0,1 mm, ihr Unterschied von der andern dagegen mit Hilfe eines Zeißschen Längenkomparators bis auf 0,001 mm genau gemessen, und zwar wurden dabei von den fraglichen beiden Blitzen möglichst solche Punkte herangezogen, die auf einer Parallelen zur horizontalen Mittellinie der Platte lagen, und die ferner auch dem oberen Ende der Blitze möglichst nahe waren. Dies letztere nämlich deshalb, um damit den der Fig. 1 zugrunde liegenden Voraussetzungen unserer Gleichungen (1) so nahe wie möglich zu kommen; denn die horizontale Mittellinie der Platte, für welche ja jene Voraussetzungen eigentlich nur Gültigkeit haben, verlief in beiden Platten einige Millimeter oberhalb der obersten Enden der Blitze.

Als Beispiel seien hier zwei Messungsreihen zur Bestimmung des Zeitunterschiedes zwischen dem kleinen Blitz 3 und der Teilentladung I des Hauptblitzes angegeben. Die Punkte P_1 und P_2' der Fig. 1 bedeuten dann bzw. Punkte der Entladungen I und 3; und für ein bestimmtes, in der genannten Weise gelegenes Punktepaar dieser Blitze ergaben sich nun in dem Bilde der feststehenden Kamera die Koordinaten $x_1' = -0{,}96$ cm; $x_2' = -2{,}1041$ cm und in dem der bewegten $x_1'' = 8{,}21$ cm; $x_2'' = 6{,}8693$ cm. Da ferner die Brennweite beider Apparate $f' = f'' = 17{,}7$ cm war, so wird mithin $\alpha_1' = -3°6{,}27'$; $\alpha_2' = -6°46{,}76'$; $\alpha_1'' = 24°53{,}03'$ und $\alpha_2'' = 21°12{,}66'$, also $\Delta\alpha' = 3°40{,}49'$; $\Delta\alpha'' = 3°40{,}37'$ und $\Delta\alpha'' - \Delta\alpha' = -0{,}12'$. Da ferner die Winkelgeschwindigkeit der bewegten Kamera $w = 15{,}6$ Grad sec betrug, so ergibt sich schließlich $\Delta t = -0{,}00013$ sec, d. h. der Blitz 3 ist hiernach 0,00013 sec vor der Teilentladung I aufgetreten.

Eine zweite Messungsreihe an zwei anderen Punkten der beiden Entladungen ergab: $x_1' = -1{,}01$; $x_2' = -1{,}9280$ cm, also $\alpha_1' = -3°15{,}95'$; $\alpha_2' = -6°13{,}00'$ und $\Delta\alpha' = 2°57{,}05'$; $x_1'' = 8{,}14$ cm; $x_2'' = 7{,}0561$ cm; also $\alpha_1'' = 24°41{,}82'$; $\alpha_2'' = 21°44{,}11'$ und $\Delta\alpha'' = 2°57{,}71'$. Demnach wird diesmal $\Delta\alpha'' - \Delta\alpha' = 0{,}66'$ und $\Delta t = +0{,}00070$ Sekunden, d. h. der Blitz 3 ist hiernach 0,00070 Sekunden nach der Teilentladung I erfolgt. Zwei weitere derartige Messungsreihen an noch anderen Punktepaaren der beiden Entladungen ergaben für Δt die Werte $-0{,}00032$ und $+0{,}00022$ Sekunden, so daß das Mittel aller vier Werte einen Zeitunterschied von $+0{,}00012$ Sekunden ergibt. Dieser liegt ganz innerhalb der Grenze der Messungsfehler, so daß wir also die beiden Entladungen 3 und I für unsere Analyse als vollkommen gleichzeitig ansehen können.

Die in dieser Weise gefundenen Zeitunterschiede zwischen den hauptsächlichsten kleinen Blitzen und den Teilentladungen I und II des Hauptblitzes unserer Aufnahmen sind nun in der folgenden Tabelle II zusammengestellt, und zwar bedeutet darin — anders als früher — ein positives Vorzeichen der Größe Δt, daß der betr. kleine Blitz vor der zugehörigen Teilentladung des Hauptblitzes auftrat, ein negatives, daß er nach ihr erfolgte. Die Indizes 1 oder 2 ferner, die man in der Tabelle II an die Zahlen 5, 6 und 9 angehängt findet, besagen, daß es sich dabei bzw. um die erste oder zweite der beiden bereits erwähnten Teilentladungen dieser kleinen Doppelblitze handelt. Die Werte von Δt sind sämtlich bis auf die vierte Dezimale abgerundet.

Die Werte von Δt der Tabelle II sind nun zunächst ihrem absoluten Betrage nach sämtlich kleiner als 0,007 Sekunden, d. h. also sämt-

Tabelle II.

a) Zeitunterschiede zwischen der Teilentladung I des Hauptblitzes und

Blitz	1	3	4	7
$\Delta t =$	$+0{,}0014$	$-0{,}0001$	$+0{,}0003$	$+0{,}0003$ sec

b) Zeitunterschiede zwischen der Teilentladung II des Hauptblitzes und

Blitz	2	5_1	5_2	9_1
$\Delta t =$	$+0{,}0013$	$+0{,}0049$	$-0{,}0029$	$+0{,}0062$ sec.

Blitz	9_2	8	9_3	9_5
$\Delta t =$	$+0{,}0007$	$+0{,}0037$	$+0{,}0032$	$-0{,}0011$ sec

lich kleiner als der zehnte Teil des kleinsten der nach Tabelle I zwischen den Teilentladungen I, II und III des Hauptblitzes liegenden Zeitunterschiede, so daß demnach die Zusammengehörigkeit dieser kleinen Blitze mit I bzw. II keinem Zweifel unterliegen kann.

Im einzelnen ist dann noch zu bemerken, daß die Werte von Δt für die kleinen Blitze 3, 4 und 7 schon so klein sind, daß man sie auch schon als Beobachtungsfehler ansehen kann, während die übrigen Zahlen der Tabelle II mit dem größten Teil ihres Betrages den wirklichen Werten entsprechen dürften. Danach würden also z. B. die beiden kleinen Blitze 1 und 2 kurz vor den Teilentladungen I bzw. II des Hauptblitzes, d. h. also noch zusammen mit den letzten Vorentladungen derselben stattgefunden haben. Von diesen Vorentladungen waren hier allerdings die meisten so schwach, daß sie auch auf der bewegten Platte nur durch die gleichzeitig mit der betreffenden Hauptentladung erfolgende Wiederholung ihrer seitlichen Verästelungen sichtbar wurden, wie dies schon in meinen angeführten Abhandlungen vom Jahre 1903 näher dargelegt wurde. Immerhin ist aber doch in unserem Falle bei der Teilentladung II eine Vorentladung derselben auf der genannten Platte (Tafelfig. 5) deutlich sichtbar geworden, da sie ja hier den oberen Teil dieser Teilentladung als eine deutlich davon getrennte und vollkommen damit parallel laufende helle Linie begleitet. Der Zeitunterschied zwischen dieser Vorentladung und der Teilentladung II selbst betrug, wie schon oben erwähnt wurde, 0,0055 Sekunden, eine Größe, die nach Tabelle II annähernd mit den Zeitunterschieden zwischen der Teilentladung II und den ersten Teilentladungen der drei kleinen Blitze 5, 6 und 9 übereinstimmt, so daß also danach diese ungefähr gleichzeitig mit jener Vorentladung stattfanden, während die zweiten Teilentladungen dieser Blitze wieder annähernd gleichzeitig mit II selbst erfolgten. Daß es sich hier allerdings nur um eine ungefähre und nicht um eine vollkommene Gleichzeitigkeit handelt, wurde schon oben betont.

Schließlich sei hier noch auf eine weitere Eigentümlichkeit des Hauptblitzes unserer Aufnahmen hingewiesen. Dieselbe besteht darin, daß an derjenigen Stelle der Teilentladung I desselben, wo später die Entladung II abzweigt, noch keinerlei Andeutung des Weges dieser letzteren zu erkennen ist, während dies bei meinen früheren Aufnahmen von Blitzen mit doppelter Einschlagstelle meist sehr deutlich der Fall war (s. die Aufnahme in Bd. 10, Tafel II, Fig. 2 der Annalen, die mit der im Hamb. Jahrb. Bd. 20, Tafel III, Fig. 11 übereinstimmt, sowie auch die der Fig. 12 der letztgenannten Tafel). Der Grund des Abspringens von seiner ersten Bahnlinie ist also bei unserem jetzigen Blitze nicht, wie in den genannten früheren Fällen, darin zu suchen, daß sich gleich bei der Ausbildung der ersten Teilentladung an mehreren Stellen der Erdoberfläche Influenzladungen ausbildeten, die dann durch zeitlich aufeinander folgende Teilentladungen neutralisiert wurden, sondern vielmehr darin, daß in der Zeit zwischen der ersten und zweiten Teilentladung unseres Blitzes der untere Teil seiner Bahnlinie sozusagen verloren ging. In Zusammenhang damit steht wahrscheinlich auch die sich an seiner zweiten Teilentladung zeigende, eigentümliche Erscheinung, daß etwas unterhalb jener Stelle, wo der neue Teil der Bahnlinie beginnt, nach rechts und links je ein sich nahezu wagerecht in der Luft ausbreitender Seitenast abzweigt, während alle anderen Seitenzweige dieser und der ersten Teilentladung deutlich nach unten zu gerichtet sind, wie ja besonders schön das Bild der ruhenden Platte erkennen läßt. Die horizontale Ausbreitung der ersteren beiden Äste besagt nun offenbar, daß sich in der Zeit zwischen der ersten und zweiten Teilentladung des Hauptblitzes in der betreffenden Gegend durch Influenz von seiten der darüberstehenden Gewitterwolke aus eine „Raumladung" ausgebildet hatte, die eben durch jene Seitenäste neutralisiert wird, und die auch vielleicht die Ursache dafür war, daß der durch die erste Teilentladung bereits erreichte Zusammenhang zwischen Wolke und Erde inzwischen wieder verloren ging.

Hamburg, Physikalisches Staatslaboratorium, im März 1918.

(Eingegangen 4. März 1918.)

Ein neuerlicher Beweis für die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur des Stokesschen Widerstandsgesetzes.

Von Irene Parankiewicz.

Aus Untersuchungen farbiger Schwefel- und Selenpartikel[1]) von der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes habe ich auf die Gültigkeit und Anwendbarkeit des nach Cunningham korrigierten Stokesschen Gesetzes in allen denjenigen Fällen, wo die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle mit den linearen Dimensionen der sich am Gase reibenden Teilchen vergleichbar ist, aus der Tatsache geschlossen, daß die bei verschiedenen Drucken nach dem genannten Widerstandsgesetze berechneten Radien verschiedener Partikel gleicher Farbe miteinander übereinstimmten.

Nun ist es mir bei der Untersuchung der photophoretischen Kräfte an Einzelteilchen des Selens gelungen, ein und dasselbe Partikel in Argon bei verschiedenen Gasdrucken zu behandeln und so ohne auf eine andere Theorie und die Bildung von Mittelwerten zurückgreifen zu müssen, die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur des Stokesschen Gesetzes vollkommen exakt nachzuweisen.

Zu diesem Zwecke wurden einzelne Selenpartikel im Ehrenhaftschen Kondensator folgendermaßen behandelt: Für ein Partikel wurde zunächst die Fallgeschwindigkeit bei Atmosphärendruck gemessen; sodann wurde an die Kondensatorplatten eine elektrische Spannung angelegt und der Kondensator gleichzeitig mit größter Vorsicht so evakuiert, daß nur eine langsame Strömung der übrigen im Kondensator noch vorhandenen Partikel sichtbar war, während das betreffende Partikel durch die Wirkung des elektrischen Feldes, die ich entsprechend vergrößerte, der Strömung entgegen gezogen wurde. Nach einiger Zeit wurde die Verbindung mit der Pumpe abgestellt. Im Kondensator befand sich nun das bereits beim Atmosphärendruck behandelte Partikel, dessen Fallgeschwindigkeit jetzt bei einem niedrigeren (am Manometer ablesbaren) Drucke gemessen werden konnte. Nachher wurde der Kondensator weiter evakuiert und auf diese Weise gelang es, ein und dasselbe Partikel bei drei oder sogar vier verschiedenen Drucken diese von 760 bis zu 340 mm Hg erniedrigend, zu behandeln.

In folgender Tabelle sind die so gewonnenen Fallzeiten sowie die Berechnungsdaten zusammengestellt.

Tabelle I.

Fallstrecke . . . . . $s = 11.4 \cdot 10^{-2}$ cm
Reibungskoeffizient des Argons bei 18° C $\mu = 2.219 \cdot 10^{-4}$
Freie mittlere Weglänge beim normalen Druck 18° C . . . . . $\lambda = 10.29 \cdot 10^{-6}$ cm
Dichte des Selens . . . . . $\sigma = 4.3$

Partikel Nr. I.

Farbe orange, lichtnegativ.
Druck 760 mm.
Fallzeiten.
7,07, 8,87, 6,68, 7,18, 6,13, 7,53.
Druck 585 mm Hg.
Fallzeiten.
5,99, 6,04, 6,96, 6,30.

Partikel Nr. V.

Farbe orange, lichtnegativ.
Druck 760 mm Hg.
Fallzeiten.
9,00, 9,92, 10,00, 9,93, 7,22, 7,41, 5,51, 9,57, 10,15, 9,74, 9,06, 7,10.
Druck 550 mm Hg.
Fallzeiten.
7,00, 7,08, 6,98, 10,05, 7,37, 8,38, 7,43, 8,11, 8,25, 6,80, 6,81, 7,04, 6,37, 7,10.

Partikel Nr. VI.

Farbe orange, lichtnegativ.
Druck 760 mm Hg.
Fallzeiten.
9,95, 10,25, 9,90, 9,26, 6,98, 8,80, 6,75, 7,39.
Druck 490 mm Hg.
Fallzeiten.
6,00, 6,84, 6,73, 6,63.
Druck 439 mm Hg.
Fallzeiten.
3,20, 5,60, 8,10, 7,08, 9,85, 4,85, 9,83, 5,37, 5,70, 5,40.
Druck 340 mm Hg.
Fallzeiten.
5,20, 5,90, 4,12, 6,74, 5,55, 6,10, 5,90, 6,00.

Tabelle II enthält die Ergebnisse dieser Messungen.

Tabelle II.

Beobachtete Farbe	Druck in mm Hg	Fallgeschwindigkeit $v/\sigma \cdot 10^3$ $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	Der nach d. Stokes-Cunninghamschen Gesetze ($\sigma = 0$) berechnete Radius $a \cdot 10^6$ cm
		Partikel Nr. V.	
orange	760	1,34	14,14
	550	1,52	14,07
		Partikel Nr. VI.	
orange	760	1,38	14,28
	490	1,08	14,47
	439	1,75	14,34
	340	2,00	14,34
		Partikel Nr. I.	
orange	760	1,58	
	585	1,80	

[1]) I. Parankiewicz, diese Zeitschr. 18, 567, 1917. Die in dieser Arbeit veröffentlichten Ausstrahlungskurven der Schwefelpartikel wurden, da dies bei weiterer Untersuchung nötig schien, durch Berechnung einiger Zwischenpunkte für größere Werte des Argumentes α ergänzt. Dabei hat es sich herausgestellt, daß die Kurven nicht einzige Maxima sondern Wellungen aufweisen; sie gelangen auch demnächst in dieser Form zur ausführlichen Publikation. Die aus den Kurven in der vorzitierten Arbeit gezogenen Schlüsse werden aber dadurch keineswegs beeinflußt.

Man kann daraus folgende Tatsachen entnehmen: Die bei verschiedenen Drucken aus den Fallgeschwindigkeiten nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze ($f = 0$) berechneten Radien desselben Partikels sind auf Promille konstant; das genannte Widerstandsgesetz liefert demnach in dem untersuchten Intervalle der Gasdrucke (von 760 bis zu 340 mm Hg) von letzteren unabhängig immer dieselben Werte der Radien der gemessenen Partikel.

Für das infolge dieser Variationen des Druckes an einem und demselben Partikel resultierende Intervall der Verhältniswerte der mittleren freien Weglänge zum Partikelradius (z. B. bei Partikel Nr. VI: $\frac{l}{a} = 0{,}7$ für 760 mm Hg, $\frac{l}{a} = 1{,}3$ für 340 mm Hg also für $\frac{l}{a} = 0{,}7$ bis $1{,}3$) ist mithin die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur der Stokesschen Widerstandsformel auf einem von den bisherigen Verfahren unabhängigen Wege, und zwar durch die Behandlung eines und desselben Versuchsobjektes nachgewiesen worden.

Zusammenfassend kann über die Prüfung der Cunninghamschen Korrektur des Stokesschen Gesetzes folgendes bemerkt werden: Da der Korrektionsfaktor des Stokesschen Gesetzes die veränderlichen l und a enthält, so ergaben sich zwei Wege zur Prüfung der Gültigkeit dieses Gesetzes. Ehrenhaft hat l konstant gehalten, a variiert, indem er verschiedene Partikel bei konstantem (normalem) Druck beobachtete, und hat auf die Richtigkeit der Cunninghamschen Korrektur aus der Übereinstimmung der mit Hilfe dieser Korrektur berechneten Radien farbiger Partikel mit den Radien, die sich für Partikel der betreffenden Farbe aus der optischen Theorie ergaben, geschlossen.

Verfasserin hat zur Prüfung des Cunninghamschen Korrektionsfaktors einen anderen Weg eingeschlagen, indem sie a konstant hielt und l durch Änderung des Druckes in der Beobachtungskammer variierte. Bisher wurde aber als Kriterium für die Konstanz von a die Voraussetzung benützt, daß Partikel gleicher Farbe gleich groß sind und auf die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur wurde daraus geschlossen, daß die Radien verschiedener Partikel gleicher Farbe, bei verschiedenen Drucken beobachtet, mit den Radien, die für Partikel dieser Farbe aus der optischen Theorie folgen, übereinstimmten.

Das in dieser Mitteilung erörterte einfache Verfahren vermeidet diese Voraussetzung und den Vergleich mit den Ergebnissen der optischen Theorie. Es wird wieder l variiert und a eben dadurch konstant gehalten, daß ein und dasselbe Partikel bei verschiedenen Drucken beobachtet und seine Größe aus den zugehörigen Fallgeschwindigkeiten und mittleren freien Weglängen der Gasmoleküle für die betreffenden Drucke berechnet wird.

Die Gleichheit der so erhaltenen Radien desselben Partikels untereinander liefert einen neuerlichen Beweis für die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur des Stokesschen Gesetzes.

Wien, I. phys. Institut der Universität. März 1918.

(Eingegangen 18. März 1918.)

Über den Zusammenhang zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente, dem spezifischen Gewicht und der Wärmetönung.

Von Karl Fehrle.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, mit Hilfe eines Bildes, welches, der heutigen Vorstellung entsprechend, die Molekeln sämtlicher Elemente als aus denselben Grundbestandteilen aufgebaut annimmt, das Bestehen eines gesetzmäßigen Zusammenhangs zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente und ihren Eigenschaften in mathematischer Form nachzuweisen.

Der gemeinschaftliche Grundbestandteil wird das „Atom" schlechtweg genannt werden. Das Bild für die Molekel möge eine homogen mit „Atomen" gefüllte Kugel sein. Die Zahl der „Atome" in der Molekel eines bestimmten Elements sei N. Jedes „Atom" möge mit der allen „Atomen" derselben Molekel gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit ω in einem Kreise um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt rotieren. Es soll weder eine bestimmte Rotationsebene, noch ein bestimmter Umlaufsinn ausgezeichnet sein.

Die Energie eines „Atoms" definiere ich als proportional dem Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit und des Radius. Die Dichtigkeit der Atome, d. h. die Anzahl pro ccm der Molekel berechnet, sei s. Dann ist die Energie der Molekel vom Radius R

$$U = C' \cdot 4\pi s \omega^2 \int_0^R r^4 dr,$$

wo C' eine Konstante bedeutet. Mithin

$$U = C' \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 s \cdot \frac{3\omega^2 R^2}{5} = \frac{3}{5} C' N \omega^2 R^2 \Big| = C N \omega^2 R^2. \quad (1)$$

Die Energie der Molekel ist also dieselbe, als ob sich sämtliche „Atome" auf der Kugelfläche mit dem Radius

$$R\sqrt{\frac{3}{5}}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit ω bewegen würden.

Angenommen nun, aus einem Teil eines Elements, bestehend aus m Molekeln zu je N „Atomen", könnte ein neues Element gebildet werden, bestehend aus p Molekeln vom Radius R_1 zu je N_1 „Atomen", so ist der von einer der neuen Molekeln eingenommene Raum bei gleicher Dichte

$$\frac{4\pi R^3 N_1}{3N} = \frac{4\pi R_1^3}{3}$$

oder

$$R_1 = R\sqrt[3]{\frac{N_1}{N}}. \quad (2)$$

Die Energie der neuen Molekel ist

$$U_1 = C N_1 \omega_1^2 R_1^2 = C N_1 \omega_1^2 R^2 \sqrt[3]{\left(\frac{N_1}{N}\right)^2}. \quad (3)$$

Für den Fall nun, daß es möglich wäre, die Umwandlung zu vollziehen, ohne daß Energie weggenommen oder hinzugefügt wird, müßte

$$U \cdot m = U_1 \cdot p$$

oder

$$U \cdot N_1 = U_1 \cdot N \quad (3a)$$

sein, d. h. die Energie der neuen Molekel wäre proportional der „Atom"zahl:

$$U_1 = C N_1 \omega^2 R^2. \quad (3b)$$

Aus (3) und (3a) folgt:

$$C N N_1 \omega^2 R^2 = C N N_1 \omega_1^2 R^2 \sqrt[3]{\left(\frac{N_1}{N}\right)^2}$$

oder

$$\omega_1 = \omega \sqrt[3]{\frac{N}{N_1}},$$

$$N_1 = N \sqrt{\left(\frac{\omega_1 N_1}{\omega N}\right)^3}. \quad (4)$$

Die Masse der Molekel definiere ich als proportional dem Produkt aus Winkelgeschwindigkeit und Zahl der „Atome", so daß der allgemeine Ausdruck für Masse von der Form ist

$$\mu = K N \omega,$$

wo K eine Konstante bedeutet. Das Atom ist also nicht an sich — in der Ruhe — sondern erst durch seine Bewegung Masse. Wird als Verhältnis der Massen der Molekeln das der Molekulargewichte der Chemie genommen und werden die letzteren mit A_1 und A bezeichnet, so geht (4) über in

$$N_1 = N \sqrt{\frac{A_1^3}{A^3}} \quad \text{oder} \quad A_1 = A \sqrt[3]{\left(\frac{N_1}{N}\right)^2}. \quad (5)$$

Setzt man in (5) an Stelle von $\frac{N_1}{N}$ die Verhältnisse der Schwingungszahlen der reinen Töne, so ergeben sich für $A = 16$ bzw. ein ganzzahliges Vielfaches davon die Atomgewichte einer großen Zahl von Elementen bzw. ihr ganzzahliges Vielfaches bis auf die 2. Dezimale genau. Beispiele sind:

$$Cr = 3O \sqrt[3]{\left(\frac{9}{8}\right)^2}. \quad Cu = Cl \sqrt[3]{\left(2 \cdot \frac{6}{5}\right)^2}.$$

$$Mn = 2O \sqrt[3]{\left(2 \cdot \frac{9}{8}\right)^2}. \quad 2Al = 3O \sqrt[3]{\left(\frac{6}{5}\right)^2}.$$

$$2Cl = 5O \sqrt[3]{\left(\frac{5}{6}\right)^2}. \quad Ge = 4O \sqrt[3]{\left(\frac{6}{5}\right)^2}.$$

$$Si = 2O \sqrt[3]{\left(\frac{5}{6}\right)^2}. \quad Mg = O \sqrt[3]{\left(\frac{15}{8}\right)^2}.$$

Die Gesamtenergie vom betrachteten Quantum des ursprünglichen Elements ist

$$U = m C N \omega^2 R^2,$$

die des Umwandlungsproduktes nach (3b)

$$U_1 = p C N_1 \omega^2 R^2$$

oder wegen (5) und

$$Am = A_1 p$$

$$U_1 = \frac{Am}{A_1} C N \sqrt{\left(\frac{A_1}{A}\right)^3} \cdot \omega^2 R^2 = U \sqrt{\left(\frac{A_1}{A}\right)}.$$

Die Gesamtenergie erscheint also im Verhältnis $\sqrt{\frac{A_1}{A}}$ vergrößert, wenn $A_1 > A$, oder verkleinert, wenn $A_1 < A$, immer gleiche Verteilungsdichte der „Atome" in beiden Arten von Molekeln vorausgesetzt. Der Unterschied ist in Form von Wärme von außen aufgenommen bzw. nach außen abgegeben worden. Das betrifft jedoch nur denjenigen Effekt, der von der Rotationsenergie der Molekeln herrührt. Dazu kommt noch die Wärme, welche durch die Änderung der fortschreitenden Bewegung der Molekeln bedingt ist, ein Effekt, welcher dem ersteren entgegengesetzt ist. Daß hier immer nur von Molekeln die Rede ist, und nicht der Unterschied zwischen Molekel und Atom in der Sprache der Chemie gemacht wird, hat seinen

Grund darin, daß es für die Berechnung der Rotationsenergie der kleinsten selbständigen Teile gleichgültig ist, wie viele von ihnen etwa zu einer größeren Gruppe vereinigt sind und welches ihre Anordnung und ihre Bewegung innerhalb derselben ist, also auch, wie man sie benennt. Ebenso wie weiter unten auch der Begriff der Molekel von Verbindungen in einer Weise angewendet werden wird, die sich insofern nicht mit der in der Chemie gebräuchlichen deckt, als auch die Verbindungen aus innerlich homogen gebauten Molekeln bestehend angenommen werden. Diese Annahme wurde lediglich zur Gewinnung eines Bildes für die Berechnung der Differenz der Energie vor und nach der gedachten Umwandlung gemacht. Über ihre Berechtigung muß der Erfolg entscheiden, nachdem die Betrachtung von der Behandlung nur gedachter Umwandlungen auf die Vorgänge bei der Verbindung zweier Elemente ausgedehnt worden ist.

Die Molekeln des einen Elements, deren Zahl a sei, mögen die Masse A_1 und die „Atom"zahl N_1 besitzen, die des anderen, an Zahl b, die Masse A_2 und die Atomzahl N_2, die der Verbindung die Masse A_3. Dann besteht die Verbindung aus

$$\frac{a A_1 + b A_2}{A_3}$$

Molekeln. Wären letztere zum Teil aus der Art A_1, zum Teil aus der Art A_2 allein entstanden, so hätten wir

$$\frac{a A_1}{A_3}$$

Stücke, die aus Molekeln von der Masse A_1 entstanden sind, und

$$\frac{b A_2}{A_3}$$

Stücke, die aus Molekeln von der Masse A_2 entstanden sind. Im ersten Falle wäre nach (5) die Atomzahl der Molekel A_3

$$N_1 \sqrt{\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^3},$$

im zweiten

$$N_2 \sqrt{\left(\frac{A_3}{A_2}\right)^3}.$$

Die Gesamtenergie der Elemente ist nach (3b)

$$U_E = C\omega^2 R^2 (a N_1 + b N_2),$$

die der Verbindung

$$U_V = C\omega^2 R^2 \left[a \frac{A_1}{A_3} N_1 \sqrt{\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^3} + b \frac{A_2}{A_3} N_2 \sqrt{\left(\frac{A_3}{A_2}\right)^3} \right]$$

oder

$$U_V = C\omega^2 R^2 \left[a N_1 \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} + b N_2 \sqrt{\frac{A_3}{A_2}} \right].$$

Die Differenz

$$U_E - U_V = C\omega^2 R^2 \left[a N_1 \left(1 - \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}\right) + b N_2 \left(1 - \sqrt{\frac{A_3}{A_2}}\right) \right]$$

stellt die Wärmetonung dar. Bezeichnet n die Anzahl der Molekeln im Mol eines Elements und verbinden sich x Mol des Elements A_1 mit y Mol des Elements vom Molekulargewicht A_2 zu z Mol der Verbindung, so ist die Wärmetönung pro Mol der Verbindung

$$W = \frac{C\omega^2 R^2 n}{z} \left[x N_1 \left(1 - \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}\right) + y N_2 \left(1 - \sqrt{\frac{A_3}{A_2}}\right) \right].$$

Da in der vorliegenden Theorie eine andere Veränderung des Zustandes, als durch Änderungen im Innern der Molekeln bedingt ist, nicht vorkommt, so kann die verschiedene Dichte der Elemente nur durch die verschiedene Dichte der Verteilung der „Atome" innerhalb der Molekel erklärt werden. Sie ist daher umgekehrt proportional dem Volumen der Molekel zu setzen, das Quadrat des Radius also und damit die Energie der Molekel umgekehrt proportional der 3. Wurzel aus dem Quadrat der Dichte. Als Dichte muß die im festen Zustande gewählt werden, denn nur hier ist anzunehmen, daß sie durch die Dichte der „Atome" innerhalb der Molekel richtig ausgedrückt wird. Die weiter unten folgende Ableitung liefert, solange R klein ist gegen 1 cm, für die Zahl der Molekeln im ccm im festen Zustand

$$\frac{1}{4R^3\sqrt{2}}$$

mithin für den von ihnen eingenommenen Raum

$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}.$$

Da beim Versuch der ganze Raum — Molekeln und Zwischenraum zusammengerechnet — zugrunde gelegt wird, so ist die Dichte innerhalb der Molekel — denn in diesem Sinne wird sie in der vorliegenden Theorie verwendet — im Verhältnis

$$\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$$

größer. Wird als Masse eines „Atoms" die-

jenige des Elektrons gesetzt, so sind die „Atom"-zahlen der Molekeln vor der Umwandlung $10^3 \cdot A_i$, wo die Indizes die einzelnen Elemente bezeichnen. Damit wird, wenn s_1, s_2 und s_3 die Dichte der Elemente bzw. der Verbindung sind,

$$W = \frac{C\omega^2 R^2 \pi \cdot 10^3}{z \cdot 4{,}189 \cdot 10^{10}} \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\right)^2} \left[x A_1 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{s_1}} - \sqrt[3]{\frac{1}{s_2}} \sqrt[3]{\frac{A_3}{A_1}} \right) + y A_2 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{s_2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{s_3}} \sqrt[3]{\frac{A_3}{A_2}} \right) \right]. \quad (6)$$

Die Dichte sei auf Wasser bezogen.

Da durch $4{,}189 \cdot 10^{10}$ dividiert wurde, stellt dieser Ausdruck kg-Kalorien vor, wenn C, ω und R in abs. E. gemessen werden. Die gesamte vor dem Klammerausdruck stehende Konstante ist in diesem Falle gleich 1,534 zu setzen. Dann ergibt die Formel den Wert der Wärmetönung richtig für die Halogenwasserstoffe, die Wasserstoffverbindungen der beiden im natürlichen System benachbarten entsprechenden Reihen, sowie für Ammoniak und die Oxyde des Stickstoffs, wenn die Molekulargewichte der Chemie eingesetzt werden. Dagegen hat es sich gezeigt, daß für die Verbindungen der Metalle das Molekulargewicht der Chemie, geteilt durch die Summe der Wertigkeiten der Elemente, zu setzen ist. Letztere Zahl wird mit w bezeichnet werden. Die Formel liefert dann die Wärmetönung für $\frac{1}{w}$ Mol. Das Resultat ist daher noch mit w zu multiplizieren, um die Wärmetönung für ein Mol der Chemie zu ergeben. Sind für je ein Element zweier Gruppen des natürlichen Systems x, y, z und w gefunden, so ergibt die Gleichung die Wärmetönung bei der Verbindung aller übrigen Elemente dieser beiden Gruppen, wie die am Schlusse angefügten Berechnungen zeigen. Die experimentell gefundenen, der 3. Aufl. von Landolt-Börnsteins Tabellen entnommenen, Werte hängen noch ab vom Wärmezustand, welcher in meine Gleichung nicht eingeht. Diese liefert vielmehr nur den auf Rechnung der Rotationsenergie zu setzenden, also von der chemischen Natur der Substanzen bestimmten Bestandteil der Wärmetönung. Dieser übertrifft jedoch fast stets den vom thermischen Zustande herrührenden so bedeutend, daß die Übereinstimmung im Gang der Wärmetönung mit Sicherheit zu erkennen ist.

Die Konstante C ist nach (1) die Rotationsenergie eines einzigen „Atoms", das mit der Winkelgeschwindigkeit 1 und dem Radius 1 rotiert. Es liegt nahe, sie so zu definieren, daß sie diejenige der mit $\omega = 1$ und $R = 1$ rotierenden Masse des Elektrons ist, also

$$C = \frac{2}{2 \cdot 61 \cdot 10^{22} \cdot 2 \cdot 10^3} = 82 \cdot 10^{-29} \text{ Erg.}$$

Mit diesem Wert von C und dem der Gesamtkonstante = 1,534 ergibt sich aus (6) für Wasser

$$1{,}534 = \frac{82 \cdot 10^{-29} \cdot \omega^2 R^2 \cdot 61 \cdot 10^{22} \cdot 10^3}{4{,}189 \cdot 10^{10}} \sqrt[3]{\frac{3{,}142^2}{18}}$$

oder

$$\omega R = 4 \cdot 10^5 \text{ cm sec}^{-1}. \quad (7)$$

Zur Berechnung von R ging ich von der Annahme aus, die Molekeln seien kugelförmig und berührten einander im Falle, daß die Substanz sich im festen Zustande befindet, derart, daß in einem gegebenen Raum das Maximum von Kugeln Platz findet. Ob letzteres zutrifft, kommt nicht in Betracht, da R nicht zur Berechnung von Wärmetönungen verwendet wird. Es soll lediglich darüber Auskunft gegeben werden, ob die Werte der Konstanten der Größenordnung nach sich mit den bekannten Tatsachen im Einklang befinden.

Ein Hohlwürfel von 1 cm Kantenlänge sei mit Kugeln in der angegebenen Weise gefüllt. An einer Kante liegen

$$\frac{1}{2R}$$

Kugeln. Solcher Reihen sind es

$$\frac{1 - 2R}{R\sqrt{3}} + 1,$$

folglich die Zahl der Kugeln auf einer Würfelfläche

$$\left(\frac{1 - 2R}{R\sqrt{3}} + 1\right)\frac{1}{2R}.$$

Solcher Lagen sind es

$$\frac{1 - 2R}{2R\sqrt{\frac{2}{3}}} + 1,$$

mithin die Gesamtzahl der Kugeln

$$\frac{1 - 2R\left(2 - \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + 2R^2\left(2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{4R^3\sqrt{2}}$$

Da der 2. und 3. Summand des Zählers im Vergleich mit 1 vernachlässigt werden können, ist die Gesamtzahl der Kugeln

$$\frac{1}{4R^3\sqrt{2}}.$$

Da der ccm Wasserstoff im festen Zustand 0,076 g wiegt, so enthält er

$$\frac{61\cdot 10^{22}\cdot 0{,}076}{2{,}016}$$

Molekeln. Damit wird

$$\frac{1}{4R^3\sqrt{2}} = \frac{61\cdot 10^{22}\cdot 0{,}076}{2{,}016}$$

oder

$$R = 2\cdot 10^{-8},$$

der Radius der Wasserstoffmolekel. Damit ergibt sich für Wasserstoff, wenn die Dichte auf diesen bezogen wird,

$$\omega = 4{,}7\cdot 10^{13}.$$

Berechnung von Wärmetönungen.

Chlorwasserstoff.

$$H_2 + Cl_2 = 2HCl$$

$x = y = 1 \qquad z = 2$

$A_1 = 2{,}016 \qquad A_2 = 70{,}92 \qquad A_3 = 36{,}47$

$s_1 = 0{,}076 \qquad s_2 = 1{,}73 \qquad s_3 = 1{,}44$

$$W = \frac{1{,}534}{2}\left|2{,}016\left(\sqrt[3]{\frac{1}{0{,}076^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{1{,}44^2}}\sqrt[3]{\frac{36{,}47}{2{,}016}}\right) + 70{,}92\left(\sqrt[3]{\frac{1}{1{,}73^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{1{,}44^2}}\sqrt[3]{\frac{36{,}47}{70{,}92}}\right)\right|.$$

$W = 22$ kg-Kal. Exper. gef.: 22 kg-Kal.

Die Daten für die weiteren Berechnungen sind in nachstehender Tabelle übersichtlich geordnet. In der vorletzten Spalte befindet sich der berechnete und, zum Vergleich damit, in der letzten der experimentell gefundene Wert nach der 3. Aufl. von Landolt-Börnsteins Tabellen.

Zusammenfassung.

Unter Zugrundelegung des Bildes einer Molekel als einer homogen mit „Atomen" gefüllten Kugel, die mit gemeinsamer Winkelgeschwindigkeit ω um denselben Mittelpunkt rotieren, unter der Annahme ferner, daß die Energie einer Molekel vom Radius R gegeben ist durch

$$U = CN\omega^2 R^2,$$

und die Masse durch

$$m = KN\omega,$$

wo N die Zahl der „Atome" in der Molekel bedeutet, wobei weder unter den Rotationsebenen irgendeine ausgezeichnet noch ein bestimmter Umlaufssinn bevorzugt ist, läßt sich zeigen, daß

Übersichtliche Zusammenstellung der Berechnungen.

Verb.	x	y	z	w	A_1	A_2	A_3	s_1	s_2	s_3	W kg-Kal. ber.	W kg-Kal. gem.
HCl	1	1	2	—	2,016	70,92	36,47	0,076	1,8	1,44	22,0	22,0
HBr	1	1	2	—	2,016	159,8	80,93	0,076	3,14	2,31	10,2	8,6
HJ	1	1	2	—	2,016	253,8	127,9	0,076	5,32	2,98	3,0	0,0
H_2S	2	1	2	—	2,016	64,14	34,09	0,076	2,07	1,01	— 1,1	2,7
H_2Se	2	1	2	—	2,016	158,4	81,22	0,076	4,80	2,17	— 0,1	— 19,4
H_2Te	2	1	2	—	2,016	255,0	129,5	0,076	6,34	2,63	— 11,5	— 35,0
H_3P	6	1	4	—	2,016	124,2	34,06	0,076	2,10	0,77	2,0	5,4
H_3As	6	1	4	—	2,016	209,8	77,98	0,076	2,40	1,37	19,0	44,2 ber.
H_3Sb	3	1	2	—	2,016	240,4	123,2	0,076	6,60	2,45	— 14,5*	— 34,0
LiJ	2	1	2	2	6,99	253,8	97,00	0,56	5,32	4,18	51,4	61,0
NaJ	2	1	2	2	23,00	253,8	75,00	1,03	5,32	3,94	61,4	69,1
KJ	2	1	2	2	39,10	253,8	85,00	0,85	5,32	3,10	81,0	80,1
CuJ	2	1	2	2	93,57	253,8	95,25	8,93	5,32	5,50	20,0	17,0
$RbCl$	2	1	2	2	85,45	70,92	90,45	1,52	1,73	2,45	97,3	106,0
RbJ	2	1	2	2	85,45	253,8	117,4	10,40	5,32	5,67	5,3	14,4
AgJ	2	1	2	2	107,9	253,8	71,68	10,40	1,73	5,57	24,4	20,4
$AgCl$	2	1	2	2	107,9	70,92	129,9	1,88	5,32	4,51	145,5	Nicht gem.
CsJ	2	1	2	2	132,8	253,8	97,07	1,55	5,32	3,96	115,5	122,0
CaJ_2	1	1	1	3	40,09	253,8	113,8	2,54	5,32	4,55	147,6	123,0
SrJ_2	1	1	1	3	87,63	253,8	130,4	2,80	5,32	5,15	155,7	136,1
BaJ_2	1	1	1	3	137,4	253,8	122,1	8,87	5,32	5,60	76,0	49,0
CdJ_2	1	1	1	3	112,4	253,8	106,4	7,17	5,32	4,70	57,6	49,0
ZnJ_2	1	1	1	3	65,37	253,8	151,3	14,38	5,32	6,00	23,4	22,0 gelb
HgJ_2	1	1	1	3	200,0	253,8						

die Wärmetönung bei der Verbindung zweier Elemente mit dem Molekulargewicht A_1 und A_2, dem spez. Gewicht s_1 und s_2 der Elemente, und dem Molekulargewicht A_3 und dem spez. Gewicht s_3 der Verbindung durch die Gleichung zusammenhängt

$$W = \frac{1{,}534}{z}\left[x A_1\left(\sqrt[3]{\frac{1}{s_1^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{s_3^2}}\sqrt[3]{\frac{A_3}{A_1}}\right) + y A_2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{s_2^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{s_3^2}}\sqrt[3]{\frac{A_3}{A_2}}\right)\right] \text{ kg-Kal.,}$$

wenn x Mol des 1. Elements sich mit y Mol des 2. zu z Mol der Verbindung vereinigen. Unter Molekulargewicht ist das Gewicht zu verstehen, das die Molekel bei dem Vorgang wirklich hat. Für die Verbindungen der Metalle hat sich ergeben, daß es gleich dem herkömmlichen Molekulargewicht, geteilt durch die Summe w der Wertigkeiten der Elemente zu setzen ist. Die Formel liefert dann die Wärmeströmung für $\frac{1}{w}$ Mol. Das Resultat ist also noch mit w zu multiplizieren, um die Wärmetönung für 1 Mol der Chemie zu ergeben.

Freiburg i. B., März 1918.

(Eingegangen 3. April 1918.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über die Anordnung der Fixsterne im Raum.

Von G. Deutschland.

I. Zur Geschichte des Problems.

Den Bau und Zustand unseres Fixsternsystems auf direktem Wege zu ermitteln, wäre gleichbedeutend mit der Bestimmung des Ortes und der Entfernung aller Sterne, sowie ihrer verschiedenen Merkmale, wie Leuchtkraft, Bewegung, Spektraltypus. An ihre Stelle können engere statistische Untersuchungen treten, welche hauptsächlich die mittleren Entfernungen, die mittleren Eigenbewegungen und Radialgeschwindigkeiten und die Anzahlen der Sterne verschiedener scheinbarer Helligkeiten für die einzelnen Teile der Sphäre betreffen. Da jedoch unsere Kenntnis der Sternparallaxen und noch mehr ihrer Bewegungen zur Ableitung von Schlüssen nicht ausreicht, kann nur die scheinbare Verteilung der verschiedenen Größenklassen, deren Feststellung auf weniger große Schwierigkeiten stößt, zugrunde gelegt werden.

Macht man über die Form der Gesetze, nach denen sich die Anordnung der Sterne im Raum vollzieht, bestimmte Annahmen, so werden ihre Konstanten derart zu bestimmen sein, daß die Projektion auf die Sphäre die beobachtete scheinbare Verteilung ergibt. Die Gesetze betreffen demnach 1) die Häufigkeit, mit welcher die Himmelskörper die verschiedenen Teile des Raumes erfüllen, 2) die Häufigkeit, in der sie nach ihrer absoluten Helligkeit an den einzelnen Stellen vorhanden sind, 3) den Intensitätsverlust des Lichtes für verschiedene Entfernungen.

Im einfachsten Falle wären offenbar die Dichtigkeit der Sternverteilung als konstant, die absolute Helligkeit aller Sterne als gleich und die Absorption des Sternenlichtes als nicht vorhanden anzusehen. Diese Annahmen, welche eine erste Vorstellung vom Bau unseres Sternsystems geben, hatte W. Herschel zuerst gemacht; er erkannte jedoch bald, daß sie nicht aufrecht erhalten werden könne.

Die Tatsache, daß die Anzahl der Sterne von gleicher scheinbarer Helligkeit mit wachsendem Abstand von der Milchstraße abnimmt, wies auf eine Abnahme der räumlichen Sterndichtigkeit mit der Entfernung von der Milchstraßenebene hin. W. Struve führte mit dieser Annahme die Untersuchung durch. Es zeigte sich aber, daß eine andere von Herschel beobachtete Erscheinung, das verringerte Anwachsen der Sternzahlen für die schwachen teleskopischen Sterne, hiermit nicht zu erklären war. Dies ließ erkennen, daß die absolute Helligkeit der Sterne nicht als gleich angesetzt werden kann, was auch schon die direkten Parallaxenbestimmungen unzweifelhaft erwiesen hatten. Es lag daher der Versuch nahe, den Sternen zwar eine konstante räumliche Dichtigkeit, aber verschiedene absolute Helligkeiten zuzuschreiben. Schiaparelli unternahm auf dieser Grundlage die Darstellung der scheinbaren Sternverteilung, gelangte aber ebenfalls nicht zum Ziel, obwohl er wie Struve auch die Absorption des Lichtes berücksichtigte.

Es blieb demnach nichts anderes übrig, als die vereinfachenden Voraussetzungen über die Verteilungsfunktionen fallen zu lassen, und das Problem auf allgemeinerer Grundlage zu behandeln. Diese Aufgabe hat H. v. Seeliger gelöst. Er setzt die Verteilung der Sterne nach ihrer scheinbaren Helligkeit sowie ihre mittleren Parallaxen in Beziehung zu den drei unbekannten Funktionen, der räumlichen Anordnung der Sterne nach ihrer Anzahl und absoluten Helligkeit sowie zur Absorption des Lichtes.

Als Voraussetzung dient nur, daß diese Helligkeiten nicht in größerer Anzahl jeden beliebigen Betrag erreichen können, sondern eine gewisse obere Grenze für sie besteht, und daß durchschnittlich an allen Stellen des Raumes das gleiche Mischungsverhältnis für die verschiedenen absoluten Helligkeiten vorhanden ist, also ihre Verteilung nicht auch vom Ort abhängt.

Die Ergebnisse der (in zahlreichen Veröffentlichungen der Kgl. Bayr. Akad. d. Wissenschaften niedergelegten) Untersuchungen, welche Seeliger nach sehr langwierigen Vorarbeiten zwecks Homogenisierung des vorliegenden Beobachtungsmaterials gewonnen hat, vermitteln uns ein Bild von der Verteilung der Sterne im Raum sowie von der Form und Größe unseres Fixsternsystems. Sie erstrecken sich über einen Zeitraum von etwa 30 Jahren und sind jetzt insofern zu einem gewissen Abschluß gelangt, als es dem Forscher gelungen ist, die Berechtigung seiner Voraussetzungen nachzuweisen, indem er Erscheinungen, die dem Problem ursprünglich fern liegen, mit ihnen erklären kann.

II. Die Sternzahlen und Parallaxen.

Die Verteilung der Sterne an der Sphäre nach ihrer Helligkeit läßt sich durch die Sternzahlen A_m angeben. Wenn der Sterngröße m die scheinbare Helligkeit h_m entspricht, so bedeutet A_m die Anzahl aller Sterne, deren scheinbare Helligkeit $> h_m$. Die Sternzahlen sind offenbar in hohem Grade von der Genauigkeit der Angaben für die Sterngrößen abhängig; insbesondere müssen alle Größen einem festen photometrischen System entsprechen. Dies ist zwar für die helleren Sterne bis zur Größe 6,5 durch die Potsdamer Durchmusterung und die Harvard Photometry erreicht; aber schon die Feststellung der A_m bis $m = 9{,}2$, welche die Bonner Durchmusterung enthält, macht wegen der ungleichen Helligkeitsverhältnisse, denen hier die Großenunterschiede entsprechen, bedeutende Schwierigkeiten. Für die schwächeren teleskopischen Sterne lassen sich nur einige Fixpunkte durch die Sterneichungen der beiden Herschel bestimmen, welche der Größe 13,90 entsprechen, und aus den Untersuchungen Kapteyns der Sternzahlen für 11,16 und 14,84, dessen Werte aber unsicherer sind als die Herschelschen. Die meisten der Sternzahlen, deren Logarithmen unter $\log A_m$ der Tab. I angegeben sind, beruhen auf Zählungen, welche nur für die nördliche Hemisphäre ausgeführt und durch Verdoppelung auf den ganzen Himmel bezogen sind.

Die Abhängigkeit dieser beobachteten Sternzahlen von der Sterngröße m läßt sich durch die Formel

Tabelle I.

Logarithmen der Sternzahlen.

m	$\log A_m$	$B - R_1$	$B - R_2$
1,5	1,312	+ 2	+ 140
2,5	1,827	+ 3	+ 87
3,75	2,450	— 10	+ 23
4,75	2,957	— 23	— 4
5,75	3,504	+ 10	+ 10
6,75	4,008	0	— 2
7,50	4,394	0	— 4
9,20	5,268	+ 3	— 4
11,16	6,222:	— 43	— 48
13,90	7,453	+ 27	+ 7
14,84	7,688	— 14	— 89

$$\log A_m = 4{,}394 + 0{,}514\,(m - 7{,}5) \qquad (1)$$

wiedergeben. Die Unterschiede der mit ihr berechneten $\log A_m$ gegen die beobachteten sind bis $m = 9{,}20$ unter $B - R_1$ aufgeführt. Bis etwa $m = 11{,}16$ stellt diese lineare Abhängigkeit die Sternzahlen noch sehr befriedigend dar; danach aber werden die berechneten Werte viel zu groß. Die drei letzten $B - R_1$ nach (1) würden lauten —,050, —,251, —,479. Für diese Größen, welche mit m' bezeichnet seien, muß die Formel demnach noch ein Zusatzglied erhalten. Eine genäherte Darstellung ergibt der Ausdruck

$$\log A_{m'} = 4{,}394 + 0{,}514\,(m' - 7{,}5) - 0{,}0240\,(m' - 10{,}5)^2, \qquad (1a)$$

mit welchem die drei letzten Differenzen $B - R_1$ erhalten sind. Die langsamere Zunahme der Sternzahlen für die schwächeren teleskopischen Sterne gegenüber den helleren ist durch den Genauigkeitsgrad der beobachteten A_m verbürgt.

Diese verhältnismäßige Sicherheit der Sternzahlen gestattet es, sie der Untersuchung der Verteilungsfunktionen zugrunde zu legen. Die mittleren Parallaxen der Sterne, welche demselben Zweck dienen könnten, sind hingegen nicht durch direkte Beobachtung bekannt. Kapteyn erhielt für sie aus den vom Einfluß der Sonnenbewegung befreiten Eigenbewegungen der

Tabelle II.

Mittlere Parallaxen.

m	$\pi(N)$	$\pi(K)$	$\pi(A)$
0,5	0",0802	0",0892	0",0903
1,5	562	630	673
2,5	447	539	578
3,5	282	375	420
4,0	178	205	299
5,0	112	187	210
6,0	71	132	145
7,0	45	94	97
8,5	22	50	53
10,0	11	33	28

Sterne, unter Voraussetzung der Regellosigkeit dieser Eigenbewegungen, den Ausdruck

$$\log \pi''_m = \log 0,''106 - 0{,}1505\, m, \qquad (2)$$

nach welchem die in Tab. II angegebenen $\pi(K)$ berechnet sind.

III. Die scheinbare und räumliche Sternverteilung.

Nach der einfachsten Annahme erfüllen die Sterne den Raum überall mit gleicher Dichtigkeit, besitzen dieselbe Leuchtkraft, und ihr Licht wird mit dem Quadrat der Entfernung geschwächt. Sind dann r_m und r_{m1} die Entfernungen, in denen die Sterne die Größen m und m_1 oder die scheinbaren Helligkeiten h_m und h_{m1} haben, sowie A_m und A_{m1} die Anzahlen aller Sterne, von den hellsten bis zu denen mit den Größen m und m_1, so müssen sich diese Sternzahlen wie die Rauminhalte der Kugeln mit den Radien r_m und r_{m1} verhalten. Aus

$$\frac{A_m}{A_{m1}} = \left(\frac{r_m}{r_{m1}}\right)^3 \quad \text{und} \quad \frac{h_{m1}}{h_m} = \left(\frac{r_m}{r_{m1}}\right)^2$$

folgt

$$\frac{A_m}{A_{m1}} = \left(\frac{h_{m1}}{h_m}\right)^{\frac{3}{2}},$$

wo nach dem gebräuchlichen photometrischen System

$$\frac{h_{m1}}{h_m} = 10^{0{,}4\,(m - m_1)}. \qquad (3)$$

Demnach ist, unter Einführung zweier Konstanten c und c',

$$A_m = c \cdot h_m^{-\frac{3}{2}} \qquad (4a)$$

oder

$$\log A_m = c' + \frac{6}{10} m \qquad (4b)$$

und

$$\log \alpha_m = \log \frac{A_m}{A_{m-\frac{1}{2}}} = \frac{3}{10}. \qquad (4c)$$

In diesem Falle bilden also die Sternzahlen . . . $A_{m-\frac{1}{2}}$, A_m, $A_{m+\frac{1}{2}}$ . . . eine geometrische Reihe mit dem konstanten Quotienten $10^{0{,}3} = 2{,}00$, die bis zu den schwächsten Sternhelligkeiten an der Grenze des Systems gültig ist.

Sind ferner π_m und π_{m_1} die r_m und r_{m1} entsprechenden Parallaxen, so ist wegen

$$\left(\frac{\pi_{m_1}}{\pi_m}\right)^2 = \left(\frac{r_m}{r_{m1}}\right)^2 = \frac{h_{m1}}{h_m},$$

unter Einführung zweier Konstanten C und C',

$$\pi_m = C \cdot h_m^{\frac{1}{2}} \qquad (5a)$$

oder

$$\log \pi_m = C' - \frac{2}{10} m \qquad (5b)$$

und

$$\log \beta_m = \log \frac{\pi_m}{\pi_{m-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{10} \qquad (5c)$$

In diesem Falle bilden also die Parallaxen . . . $\pi_{m-\frac{1}{2}}$, π_m, $\pi_{m+\frac{1}{2}}$ . . . eine geometrische Reihe mit dem konstanten Quotienten $10^{-0{,}1} = 0{,}794$.

Ein Vergleich der Ausdrücke (1) mit (4b) und (2) mit (5b) zeigt nun eine andere Abhängigkeit der beobachteten A_m und π_m von der Sterngröße. Es wird sich hier vorwiegend darum handeln, unter welchen Voraussetzungen die beobachteten A_m zu erhalten sind. Die Gleichung (1) läßt sich in der Form schreiben

$$\log A_m = c' + \frac{6 - 2\lambda}{10} m$$

$$A_m = c \cdot h_m^{\frac{\lambda - 3}{2}} \qquad (6)$$

$$\log \alpha_m = \log \frac{A_m}{A_{m-\frac{1}{2}}} = \frac{3 - \lambda}{10},$$

wo $\lambda = +0{,}43$. Die A_m nehmen in Wirklichkeit nicht in dem Maße zu, wie es bei konstanter Dichtigkeit sein müßte. Die naheliegendste Annahme wäre nun, daß die räumliche Dichtigkeit D der Sterne selber nicht konstant ist, sondern mit der Entfernung abnimmt. Für die Anzahl $\mathfrak{A}_m$ aller Sterne von der Größe m ergibt sich

$$\mathfrak{A}_m = 4\pi r^2 D(r)\, dr,$$

woraus die Anzahl aller Sterne bis zur Größe m folgt

$$A_m = 4\pi \int_0^{r_m} r^2 D(r)\, dr.$$

Hat nun etwa das Dichtigkeitsgesetz die Form

$$D(r) = \gamma \cdot r^{-\lambda},$$

wo γ eine Konstante ist, so wird, wenn man die obere Grenze r_m durch die scheinbare Helligkeit h_m, und die Helligkeit h_0 in der Entfernung 1 ausdrückt,

$$A_m = 4\pi\gamma \int_0^{\sqrt{\frac{h_0}{h_m}}} r^{2-\lambda}\, dr$$

$$= \frac{4\pi\gamma}{3 - \lambda} \left(\frac{h_0}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} = c \cdot h_m^{\frac{\lambda - 3}{2}},$$

wo c die Größe λ enthält und hinsichtlich m konstant ist. Die für $D(r)$ aufgestellte Form führt also auf den Ausdruck (6) für die Sternzahlen; ebenso läßt sich, wenn auch umständlicher, nachweisen, daß (6) das genannte Gesetz für $D(r)$ zur Folge hat.

Auch in diesem Falle muß das Bildungsgesetz (6) der A_m sich bis auf die schwächsten Stern-

helligkeiten erstrecken. Dem widersprechen jedoch die für $m = 13{,}9$ und $m = 14{,}8$ beobachteten Sternzahlen, bei denen der Quotient c einen anderen, viel kleineren Wert hat; denn nach (1a) ist

$$\log c_m' = 3 - \lambda^{\frac{m'-10{,}75}{10}} \cdot 0{,}24 \,(m' - 10{,}75). \quad (6a)$$

Die Größe n, bei welcher diese Änderung der c eintritt, läßt sich zunächst noch nicht näher angeben. Jedenfalls aber wird hier eine zweite Erweiterung der Voraussetzungen nötig. Nimmt man an, daß die absoluten Helligkeiten der Sterne verschieden sind, und bezeichnet die Sterngröße, welche die absolut hellsten Sterne an der Grenze des Systems erreichen, mit n, so folgt, daß die Sternzahlen der schwächeren Sterne mit der Größe m' $(m' > n)$ weniger stark anwachsen als die A_m $(m < n)$, weil in den Entfernungen, in denen die hellsten Sterne die scheinbare Größe m' erreichen würden, keine Sterne mehr stehen. In der Tat haben auch die direkten Parallaxenbestimmungen die Verschiedenheit der absoluten Helligkeiten erwiesen.

Es hat sich somit die Notwendigkeit gezeigt, die ursprünglichen Annahmen über die räumliche Verteilung der Sterne nach Anzahl und absoluter Helligkeit fallen zu lassen. Wie spektralanalytische Untersuchungen der letzten Jahre andeuten, ist es weiterhin auch erforderlich, die dritte Voraussetzung von der Unmerklichkeit der Absorptionswirkung aufzugeben, so daß nur eine allgemeine Behandlung der Aufgabe zum Ziele führen kann.

IV. Die räumliche und scheinbare Sternverteilung.

Der scheinbaren Helligkeit h eines Sternes in der Entfernung r entspreche in der Entfernung 1 die scheinbare Helligkeit i, seine Leuchtkraft oder absolute Helligkeit. Zwischen diesen Größen besteht die Beziehung $i = hr^2$, welche bei Wirksamkeit einer Absorption zu

$$h = \frac{i}{r^2} \cdot \psi(r) \quad (7)$$

wird. Hier ist der Absorptionsfaktor $\psi(r) < 1$, da er die scheinbare Helligkeit verringert.

Auf die Gesamtheit der in der Volumeinheit enthaltenen Sterne, welche die räumliche Dichtigkeit $D(r)$ angibt, sind die Sterne verschiedener Leuchtkräfte in einem Verhältnis verteilt, das die Verteilungsfunktion $\varphi(i)$ bestimmt. Die Leuchtkräfte i haben einen gewissen endlichen Höchstwert H, so daß das Integral

$$\int_0^H \varphi(i)\, di = F(H) = 1 \quad (8)$$

die Anzahl der Sterne aller Leuchtkräfte umfaßt und als Maßstab für die Anzahlen der einzelnen i dient.

Die Größen D, φ, H, ψ werden im allgemeinen vom räumlichen Ort abhängig, also Funktionen der Entfernung und Richtung sein. Die Veränderlichkeit mit der Richtung kann dadurch berücksichtigt werden, daß die Funktionen für verschiedene Teile der Himmelsoberfläche erhalten werden. Die Eindeutigkeit ihrer Ermittlung macht aber die Annahme nötig, daß das Mischungsverhältnis φ der Leuchtkräfte überall das gleiche sei. Damit sind die Abhängigkeiten auf $D(r), \psi(r), \varphi(i), H = \text{const}$ zurückgeführt.

Die Anzahl der Sterne auf dem Flächenstück ω in der Entfernung r mit der Leuchtkraft i, die in diesem Abstand die scheinbare Helligkeit h_m haben, wird

$$A_m(r) = \omega r^2 D(r)\, dr\, \varphi(i)\, di .$$

Demnach wird die Anzahl aller Sterne in der Entfernung r, deren scheinbare Helligkeit $\geq h_m$,

$$A_m(r) = \omega r^2 D(r)\, dr \int_{\frac{h_m r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(i)\, di ,$$

und weiterhin die Anzahl aller Sterne, deren scheinbare Helligkeit $\geq h_m$,

$$A_m = \omega \int_{r_0}^{r'} r^2 D(r)\, dr \int_{\frac{h_m r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(i)\, di , \quad (9)$$

wo die Entfernung r', bis zu welcher zu integrieren ist, sich nach (7) zu

$$r' = \sqrt{\frac{H \cdot \psi(r')}{h_m}} \quad (10a)$$

bestimmt. In dieser Entfernung nehmen die absolut hellsten Sterne die scheinbare Helligkeit h_m an. Je kleiner h_m, desto weiter schiebt sich r' hinaus. Die scheinbare Helligkeit der hellsten Sterne an der Grenze r_1 des Systems sei h_n, wo wiederum

$$r_1 = \sqrt{\frac{H \cdot \psi(r_1)}{h_n}} . \quad (10b)$$

Rückt r' außerhalb der Grenze r_1, was für noch schwächere Helligkeiten als h_n der Fall ist, so kann sich die Integration nur bis zu r_1 erstrecken, und für die A_m', deren $m' > n$, ist in (9) r' durch r_1 zu ersetzen. Die untere Grenze r_0 ferner kann hier gleich Null gesetzt werden. Damit sind die beiden Bildungsgesetze für A_m und A_m' bestimmt.

Die Anzahl der Sterne von der scheinbaren Helligkeit h_m erhält man aus (9) zu

$$\frac{\partial A_m}{\partial h_m} = -\omega \int_0^r \frac{r^4}{\psi(r)} D(r) \varphi\left(\frac{h_m r^2}{\psi(r)}\right) dr,$$

und hieraus ergibt sich für die mittlere Parallaxe π_m der Sterne von der Größe m der Ausdruck

$$\pi_m \cdot \int_0^r \frac{r^4}{\psi(r)} D(r) \varphi\left(\frac{h_m r^2}{\psi(r)}\right) dr = \int_0^r \frac{r^3}{\psi(r)} D(r) \varphi\left(\frac{h_m r^2}{\psi(r)}\right) dr . \quad (11)$$

Diese Formeln für die Sternzahlen und Parallaxen können durch passende Umformung eine Gestalt erhalten, welche sie in gewissem Grade von der Absorption unabhängig macht. Setzt man

$$\frac{r^2}{\psi(r)} = \varrho^2, \quad r = f(\varrho), \qquad A(\varrho) = D(f(\varrho)) \cdot \left(\frac{f(\varrho)}{\varrho}\right)^2 \cdot f'(\varrho), \quad (12)$$

so wird

$$A_m = \omega \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} A(\varrho) \varrho^2 d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H} \varphi(i)\, di \quad (13a)$$

$$A_m' = \omega \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} A(\varrho) \varrho^2 d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H} \varphi(i)\, di \quad (13b)$$

$$\frac{\pi_m}{\sigma'',2} = \frac{\int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} A(\varrho) \frac{\varrho^4}{f(\varrho)} \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho}{\int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} A(\varrho) \varrho^4 \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho} \quad (14)$$

und entsprechend π_m'. Die Einheit der Entfernung ist dabei entsprechend einer Parallaxe von $0'',2$ gewählt. Als Spezialfall von (13b) folgt für die Anzahl aller Sterne

$$A_\infty = \omega \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} A(\varrho) \varrho^2 d\varrho . \quad (13c)$$

Da in den Gleichungen (13) die Absorption nicht vorkommt, so können sie behandelt werden, ohne daß ψ bekannt ist. Die Parallaxenformel dagegen setzt die Beziehung zwischen r und ϱ für die Ausführung der Integration voraus. Ist ferner die Absorption unmerklich, also $\psi(r) = 1$, so nimmt (9) dieselbe Form wie (13) an. Man kann darum auch $A(\varrho)$ als wahre räumliche Dichte $D(r)$ und ϱ als wahre Entfernung r betrachten; gegebenenfalls läßt sich dann die Absorption durch Einführung von ψ in den Grenzen berücksichtigen.

Die Berechnung der unbekannten Verteilungsfunktionen vereinfacht sich außerordentlich durch die Form (6), in der die beobachteten Sternzahlen dargestellt werden konnten. Aus (13a) wird nach (8)

$$\frac{1}{\omega} A_m = \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} A(\varrho) \varrho^2 d\varrho = \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} A(\varrho) \varrho^2 F(h_m \varrho^2)\, d\varrho , \quad (15a)$$

was durch das Dichtigkeitsgesetz $A(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ und mit $x = h_m \varrho^2$ auf

$$\frac{1}{\gamma \omega} A_m = \frac{H^{\frac{3-\lambda}{2}}}{3-\lambda} h_m^{\frac{\lambda-3}{2}} - h_m^{\frac{\lambda-3}{2}} \int_0^H x^{\frac{1-\lambda}{2}} F(x)\, dx = \frac{c}{\gamma} \cdot h_m^{\frac{\lambda-3}{2}} \quad (15b)$$

führt. Die Beziehung:

$$A(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda} \text{ entspricht } A_m = c \cdot h_m^{\frac{\lambda-3}{2}} \quad (16)$$

gilt also für alle φ, und ebenso läßt sich das Umgekehrte beweisen. Die Abhängigkeit $A_m'(h_m')$ wird jedoch durch den Ausdruck für φ bestimmt, denn im Integral von (15b) ist hier H durch $H \cdot \frac{h_m}{h_m'}$ zu ersetzen.

Auch die Parallaxen erhalten für das Dichtigkeitsgesetz (16) eine sehr einfache Form, wofern man von dem Einfluß der Absorption absieht. Setzt man wiederum $x = h_m \varrho^2$, so ist nach (14)

$$\frac{\pi_m}{\sigma'',2} = h_m^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\int_0^H x^{\frac{2-\lambda}{2}} \varphi(x)\, dx}{\int_0^H x^{\frac{3-\lambda}{2}} \varphi(x)\, dx} = C \cdot h_m^{\frac{1}{2}} . \quad (17)$$

Demnach werden auch die π_m bis auf einen konstanten Faktor unabhängig vom Verteilungsgesetz φ und verlaufen proportional mit der Wurzel aus der scheinbaren Helligkeit, während für die π_m' diese einfache Abhängigkeit von h_m nicht mehr besteht. Falls die beobachteten mittleren Parallaxen von den durch (17) dargestellten normalen Parallaxen abweichen,

so müßte dies, bei Gültigkeit des Gesetzes (16), durch die Absorption verursacht sein.

Es liegt daher nahe, von den drei unbekannten Funktionen die räumliche Dichtigkeit aus den A_m, die Verteilung der Leuchtkräfte aus den $A_{m'}$ und die Absorption aus den π_m zu bestimmen. Aus den $A_{m'}$ ergibt sich weiterhin mit Hilfe von φ die Grenzgröße h_m, während der Betrag H der größten Leuchtkraft nicht aus den Abzählungen, sondern aus den Parallaxen zu erhalten ist. Aus H und h_m aber folgt nach (10b) sofort die Grenze r_1 des Systems.

Das Dichtigkeitsgesetz $A(\varrho)$ ist zunächst durch (16) gegeben, wo $\lambda = 0{,}43$, und die mit ihm dargestellten A_m sind aus $B - R_1$ der Tab. I zu ersehen. Seinen Verlauf gibt unter $A_0(\varrho)$ die Tab. III an, wo der Faktor $\gamma = 1$ gesetzt ist. Denn da die konstanten Faktoren von A und φ in (13) und (14) nur als Produkt vorkommen, sind sie nicht einzeln zu erhalten. Die durch (17) dargestellten normalen Parallaxen sind weiterhin in der Tab. II unter $\pi(N)$ angegeben, wobei zum Vergleich $\log C = 0{,}09$ gewählt wurde. Der Unterschied der $\pi(N)$ und $\pi(K)$ ist sehr bedeutend. Wie die Formeln (2) und (5) zeigen, beträgt der Wert des Quotienten π_m/π_{m-1} für die Kapteynschen Parallaxen 0,707, für die normalen Parallaxen dagegen 0,631. Eine Übereinstimmung kann also durch passende Wahl des Faktors C, der sich aus dem Gesetz $\varphi(i)$ bestimmt, nicht erzielt werden. Macht man nun die Annahme einer gleichmäßigen, allgemeinen Absorption, welche durch

$$\varphi(r) = \exp.(-\nu \cdot r) \qquad (18)$$

$$\varrho = r \cdot \exp.\left(\frac{\nu \cdot r}{2}\right)$$

(wo allgemein $\exp.(x)$ nach dem Vorgange von H. Bruns e^x bedeutet), oder genügend genähert durch

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho} + \alpha + \beta \ln \varrho \qquad (18a)$$

gegeben ist, wo die Konstanten α und β aus ν zu erhalten sind, so wird derjenige Wert von ν zu bestimmen sein, mit welchem aus den normalen die beobachteten mittleren Parallaxen erhalten werden. Es zeigt sich mit einem vorläufigen Ansatz für φ, daß erst bei etwa $\nu = \frac{1}{15}$ eine genügende Annäherung an die $\pi(K)$ erreicht werden kann. Das führt aber auf derartig große Absorptionsbeträge, daß sie aus verschiedenen Gründen als ganz unwahrscheinlich anzusehen sind (vgl. weiter unten).

Will man den Kapteynschen Parallaxen die nötige Sicherheit zusprechen, so bleibt nur der Schluß übrig, daß das Gesetz (16) nicht in aller Strenge besteht, denn nur durch eine Änderung von A können andere Parallaxen als die $\pi(N)$ erhalten werden. Dadurch aber macht sich zugleich das Verteilungsgesetz $\varphi(i)$ sowohl für die A_m wie für die π_m bemerkbar.

Es muß demnach vorläufig auf die Bestimmung der Absorption verzichtet werden. Nachdem φ genähert aus den $A_{m'}$ bestimmt ist, ergibt sich das nötige Zusatzglied für A, durch welches sowohl in den A_m wie in den π_m Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung erzielt wird. Mit diesem geänderten A eine zweite Bestimmung für φ und danach wiederum für A auszuführen, wird sich wegen der Unsicherheit der $A_{m'}$ erübrigen.

Die Ermittelung von φ aus den $A_{m'}$ wird durch Verbindung von (13) mit (1a) und $A(\varrho)$ nach (16) möglich. Allgemein ist

$$\frac{\partial A_{m'}}{\partial h_m} = -\omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} A(\varrho)\, \varrho^5 \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho . \qquad (19)$$

Für $A_{m'}$ steht in der oberen Grenze h_n statt h_m. Führt man $A = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ ein, so ergibt sich nach nochmaliger Differentiation für $\varphi(i)$ die Form

$$\varphi(i) = \Gamma \cdot \exp.(a \log i + b(\log i)^2) \cdot \cdot [1 + c \log i + d(\log i)^2], \qquad (20)$$

wo wie auch im folgenden, i in Einheiten von H ausgedrückt ist. Die Ermittelung der A_m und π_m läßt sich nun, wie aus (19) und (17) ersichtlich, auf die Berechnung des Integrals

$$J_\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot \int_{\frac{h_m}{H} r_0^2}^{1} x^{\frac{\mu-1}{2}} \cdot \varphi(Hx)\, dx \qquad (21)$$

zurückführen. Mit φ nach (20) und A nach (16) läßt sich J_μ als Krampsches Integral bestimmen, worauf A_m und π_m zu berechnen sind. Um bei beiden eine Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung zu erzielen, ergibt sich für $A(\varrho)$ der Ansatz

$$A(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}(1 - \alpha \cdot \varrho^{\lambda - \lambda_1}) = \gamma \cdot \varrho^{-0{,}43}(1 - 0{,}58\, \varrho^{-0{,}57}). \qquad (22)$$

Da dieser Ausdruck für kleinere Entfernungen als $\varrho = \frac{1}{3}$ zu negativen Werten der Dichte führt, wird die untere Grenze zu $r_0 = \frac{1}{3}$ ($\alpha = 0{,}6$) angesetzt. Der Verlauf von φ bestimmt sich weiterhin zu

$$\frac{1}{\Gamma} \cdot \varphi(i) = \exp.(-5{,}3844 \log i - 0{,}2301 \cdot \cdot (\log i)^2) - \exp.(\log i / \log e) \qquad (23)$$

wo das zweite Glied nur für die allergrößten, bei H gelegenen Leuchtkräfte merkliche Beiträge liefert. Für $i = 0$ wird offenbar $\varphi = \infty$. Es läßt sich jedoch nachweisen, daß für die vorliegenden A_m und A_m' nur die Verteilung der großen Leuchtkräfte von Einfluß ist. Die größte Leuchtkraft H entspricht der Sterngröße $-4{,}3$, während aus den Kapteynschen Parallaxen in guter Übereinstimmung damit $-4^m{,}6$ folgt.

Die aus (22) und (23) erhaltenen mittleren Parallaxen sind in Tab. II unter $\pi(I)$ aufgeführt. Mit Rücksicht auf den hypothetischen Charakter der $\pi(K)$ wäre es unzweckmäßig, durch Veränderung der angenommenen Konstanten einen besseren Anschluß zu suchen. Das Gleiche gilt für die aus denselben Ansätzen berechneten Sternzahlen. Sie sind aus Tab. I zu ersehen, wo ihre Unterschiede $B - R_2$ gegen die beobachteten Werte angegeben sind.

Die Helligkeit h_a der absolut hellsten Sterne an der Grenze des Systems ergibt sich aus den A_m' zu h_a entsprechend $10^m{,}5$, woraus nach (10b)

$$r_1 = 910 \text{ oder } \pi_{(1)} = 0''{,}00022$$

folgt. Den Verlauf der räumlichen Sterndichtigkeit innerhalb dieser Grenzen gibt nach (22) die Tab. III unter $A(\varrho)$ an, wobei wiederum der Faktor γ passend gewählt ist. Es zeigt sich, daß zwischen diesem und dem ursprünglichen Dichtigkeitsgesetz $A_0(\varrho)$ nur für die nächste Umgebung der Sonne größere Abweichungen bestehen. Bereits in einer Entfernung von etwa vier Einheiten ist der Unterschied genügend gering.

Tabelle III.

Verlauf der räumlichen Sterndichtigkeit.

ϱ	$A_0(\varrho)$	$A(\varrho)$	$D_0 - A_0$
1	1,000	0.614	0,00
2	0,742	610	0
3	624	551	0
4	551	522	0
5	501	488	0
10	372	385	0
50	186	195	0
100	138	143	+1
500	69	67	+2
1000	51	51	+3

Um aus der scheinbaren räumlichen Dichtigkeit A die wahre Dichte D zu erhalten, ist die Kenntnis der Absorptionswirkung notwendig. Betrachtet man eine allgemeine Absorption von der Form (18), so wird nach (12)

$$D(r) = \gamma \cdot r^{-\lambda} \cdot \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{(\psi(r))^{\frac{5-\lambda}{2}}} = \gamma \cdot r^{-\lambda} \cdot \left(1 + \frac{\nu}{2} r\right) \cdot \exp.\left(\frac{3-\lambda}{2} \cdot \nu r\right). \quad (24)$$

Für große Beträge von ν ergibt sich ein starkes Anwachsen von D gegen die Grenzen des Systems, was man im Hinblick auf das bei den Spiralnebeln beobachtete umgekehrte Verhalten als unwahrscheinlich ansehen kann. Macht man darum die Voraussetzung, daß die wahre Dichtigkeit im allgemeinen mit wachsender Entfernung nicht zunimmt, so läßt sich nach (24) für ν eine gewisse obere Grenze angeben. Dieser Höchstwert von ν folgt aus der Bedingung, daß an der Grenze des Systems die Änderung der Dichte mit der Entfernung von negativen zu positiven Werten übergeht. Für $x = \frac{\nu r_1}{2}$ wird nach (24)

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dr} = \frac{3-\lambda}{r(1+x)}\left[x^2 + x\frac{2(2-\lambda)}{3-\lambda} - \frac{\lambda}{3-\lambda}\right].$$

Setzt man den Klammerausdruck gleich Null, so ist

$$x = 0{,}1243 = \frac{\nu r_1}{2}, \quad \psi(r_1) = 0{,}7800,$$

$$r_1 = 805, \quad \nu = 0.000\,3086.$$

Die Ausdehnung des Systems wird also von 910 auf 805 Einheiten reduziert, die Lichtschwächung beträgt nach (3) $= 2{,}5 \log \psi(r_1) = 0{,}^m27$, und die nach (24) mit dem erhaltenen ν berechnete Dichtigkeit D_0 nimmt gegen A_0 um die in Tab. III, in Einheiten der zweiten Stelle angegebenen Beträge zu. Auch nach anderen Annahmen über das Absorptionsgesetz zeigt sich eine ähnlich geringe Änderung in der Verteilung der Sterne.

V. Die Sternverteilung und die Milchstraße.

Die Betrachtung der für die ganze Sphäre vereinigten Sternzahlen hatte zwei Gesetze ergeben: 1). Die Sternzahlen nehmen bis etwa zur 11. Größe zwar gleichmäßig, aber beträchtlich langsamer zu, als dies bei konstanter räumlicher Verteilung der Fall wäre. 2). Die Sternzahlen der schwächeren teleskopischen Sterne wachsen beträchtlich langsamer als die unter 1) genannten. Daraus konnten die Abhängigkeiten $A(\varrho)$ und $\varphi(i)$ abgeleitet werden. Eine wesentliche Ergänzung geben nun die Sternzahlen für die einzelnen Bezirke des Himmels, die eine starke Abhängigkeit von der Lage zur Milchstraße erkennen lassen. Diese Abhängigkeit kann in der Weise berücksichtigt werden, daß die Sphäre in 9 je 20 Grad breite, symmetrisch zur Milchstraße liegende Zonen eingeteilt wird, für deren jede eine besondere Sternverteilung erhalten wird. Das verfügbare Beobachtungsmaterial bezieht sich jedoch hauptsächlich auf die Himmelshälfte nördlich des Äquators und ist daher im wesent-

lichen auf die nördliche galaktische Hemisphäre beschränkt. Die Anordnung der Sterne hat sich aber für je zwei symmetrisch liegende galaktische Zonen so weit als gleich ergeben, daß man berechtigt ist, die Verteilung auf der nördlichen galaktischen Halbkugel als maßgebend für die ganze Sphäre zu betrachten. Das typische Sternsystem, welches den Einfluß der Lage zur Milchstraße auf die Sternverteilung berücksichtigt, besteht daher aus fünf galaktischen Zonen A bis E, von denen A bis D je 20, E 10 Grad Breite haben, und deren Flächeninhalt in Quadratgraden in Tab. IV unter F angegeben ist.

Die Konstanz der Quotienten α, die sich für die Sterne verschiedener Größen bis zur neunten Größe ergeben hatte, besteht nun auch innerhalb jeder Zone. Sie weichen für die Durchmusterungssterne sechster bis neunter Größe nur wenig von ihrem Mittel ab, das für jede Zone unter $\log \alpha(D)$ aufgeführt ist, und ähnliche Werte folgen aus den hellen Sternen bis zur sechsten Größe. In dem gleichmäßigen Anwachsen dieser Beträge zeigt sich deutlich der Einfluß der Milchstraße. Außer den in Tab. I angegebenen Sternen lassen sich hier noch Zählungen benützen, welche Celoria innerhalb einer schmalen Deklinationszone ausgeführt hat. Bildet man die Verhältnisse C/D der Sternzahlen nach Celoria und nach der Durchmusterung für jede Zone, so ergeben sich, wie die Tab. IV zeigt, gleichlautende Werte. Die Größe der C-Sterne ist unbekannt, man kann sie zu etwa 11^m ansetzen. Das führt auf das folgende Gesetz: 3). Die Zahl der hellen Sterne bis etwa zur 11. Größe wächst mit der Sterngröße um so langsamer, je weiter die betrachtete Gegend von der Milchstraße entfernt ist.

Tabelle IV.

Die scheinbare typische Sternverteilung.

	F	$\log \alpha(D)$	$C:D$	$H:D$	$K:H$
A	1243	0,218	—	50	2
B	5585	228	20	64	2
C	5488	251	20	79	2
D	6730	264	20	122	2
E	3583	272	20	272	2

Während die helleren Kapteyn-Sterne sich ähnlich wie die Celoria-Sterne verhalten, zeigen die Sternzahlen nach Herschel und die der schwächeren Kapteyn-Sterne (K) einen wesentlich anderen Verlauf. Bildet man aus den Zählungen von W. und J. Herschel, welche allerdings für die Milchstraße divergieren, das Mittel H, so ergeben sich aus H, D und K die Quotienten der Tab. IV. Sie lassen das Gesetz erkennen: 4). Das Anwachsen der Sternzahlen mit der Sterngröße verringert sich für die schwächeren Sterne mit der Entfernung von der Milchstraße verhältnismäßig viel stärker, als für die helleren Sterne bis etwa 11^m.

Das verschiedene Verhalten der Sternzahlen für die einzelnen Zonen muß sich auch in den Verteilungsgesetzen A und φ äußern. Da aber die Verteilung der Leuchtkräfte als unabhängig vom Ort vorausgesetzt war, so wird sie folgerichtig auch für alle Zonen als gleich anzusehen sein. Im typischen System hat daher nur die Dichtigkeit einen zonenweise verschiedenen Verlauf.

Unter Voraussetzung der strengen Gültigkeit von (16) für das Dichtigkeitsgesetz würde man aus den $\alpha(D)$ der Tab. IV nach (6) die Exponenten λ erhalten. Diese Werte sind als λ_0 in Tab. VI angegeben. Sie zeigen, daß die Dichtigkeit an den galaktischen Polen mit der Entfernung viel stärker abnimmt als in der Nähe der Milchstraße. Es ist jedoch für die Verteilung der Sterne und die Begrenzung des Systems der Ansatz (22) zugrunde zu legen. Das empirische Material liefern die in Tab. V angegebenen Sternzahlen, welche die ungenaueren Kapteyn-Sterne nicht enthalten.

Tabelle V.

Logarithmen der Sternzahlen.

m	A	B	C	D	E
3,5	0,659	1,153	1,458	1,451	1,393
4,5	0,984	1,728	1,930	2,083	1,862
5,5	1,714	2,202	2,431	2,622	2,454
6,5	2,250	2,691	2,928	3,146	2,983
7,5	2,740	3,153	3,415	3,659	3,519
9,2	3,440	3,937	4,263	4,565	4,426
13,9	5,140	5,742	6,164	6,650	6,860

Die Aufgabe läßt sich auch hier auf die Berechnung des Integrals J_μ nach (21) zurückführen, in dem φ nach (23) ersetzt wird, und das eine Funktion von m und λ ist. Die A_m sind alsdann in einfacher Weise aus den J_μ zu erhalten; und die $A_{m'}$ unterscheiden sich von den nach dem Bildungsgesetz der A_m berechneten A_{m_1}' um einen Betrag $\Delta A_{m'}$, der sich mit den Argumenten $m' - n$ und λ erhalten läßt und die Anzahl derjenigen Sterne darstellt, welche in einer größeren Entfernung als r_1 eine Helligkeit $> h_{m'}$ besitzen würden. Demzufolge sind zunächst die Sternzahlen für $m = 3{,}5,\ 4{,}5,\ \cdots\ 9{,}2$ mit verschiedenen Werten von λ zu berechnen und mit den aus der Beobachtung gewonnenen A_m der Tab. V zu vergleichen. Dadurch läßt sich für jede Zone der zugehörige Exponent λ bestimmen, dessen Beträge in Tab. VI aufgeführt sind und mit den λ_0 befriedigend übereinstimmen. Mit Hilfe der bekannten λ können

auf dieselbe Weise für jede Zone das A_{m_0}' für $m' = 13{,}9$ und die zugehörigen AA_m' berechnet und von den AA_m' dasjenige ausgesucht werden, welches von A_{m_0}' auf das beobachtete A_m' führt. Dadurch ist für jede Zone das zugehörige n festgelegt, und mittels (10b) ergibt sich die entsprechende Entfernung r_1 der Grenze des Systems. Die Werte von n und r_1 enthält ebenfalls Tab. VI. Sie sind besonders für die Milchstraße als noch unsicher zu bezeichnen, da hier die A_m nach W. Herschel doppelt so groß sind als nach J. Herschel.

Tabelle VI.

Konstanten des Systems der Milchstraße.

Z	λ_0	λ	n	r_1	$\eta \cdot r_1$
A	0,82	0,89	8,3	347	5,3
B	72	74	8,0	380	6,2
C	49	62	9,0	457	7,5
D	36	44	9,8	645	10,6
E	28	34	11,9	1700	27,7

Jedenfalls steht die starke Abplattung des Systems außer Frage. Sein Durchmesser in der Milchstraßenebene würde sich zu 3400, seine Achse durch die galaktischen Pole zu 654 Einheiten ($\pi = 0''{,}2$) angeben lassen; und die hellsten Sterne, die in der Entfernung 1 die Sterngröße $-4{,}3$ besitzen, haben an den Polen die Größe 8,3, in der Milchstraße 11,9. Die Spalte $\eta \cdot r_1$ gibt r_1 in Einheiten von 1000 Lichtjahren.

Die mit den erhaltenen Verteilungsfunktionen für die einzelnen Zonen zu berechnenden mittleren Parallaxen können nicht mit der Beobachtung verglichen werden, da die Kapteynschen Parallaxen nur für den ganzen Himmel ermittelt sind. Ihre Haupteigenschaft jedoch, welche die Rechnung ergibt, die gleichförmige Veränderlichkeit mit der galaktischen Breite, scheint auch in anderen Beobachtungen angedeutet, die noch zu erwähnen sind.

VI. Die Verteilungsfunktionen.

Obwohl unsere Kenntnis der mittleren Parallaxen und mittleren räumlichen Bewegungen der Sterne sowie der Verteilung der Spektraltypen nicht zur selbständigen Ableitung der Verteilungsgesetze ausreicht, ermöglicht sie es doch, zu prüfen, ob der für diese erhaltene Verlauf mit ihnen vereinbar ist. Die wichtigste Voraussetzung, auf der die angegebenen Resultate beruhen, betrifft die Möglichkeit, das eigentliche Verteilungsgesetz der Sterne, welches eine Funktion von ihrem Ort und ihrer Leuchtkraft ist, in ein Produkt von zwei Funktionen A und φ zu zerlegen, deren eine vom Ort, deren andere von der Leuchtkraft abhängt. Während die Abhängigkeit $A(\varrho)$ durch die Definition gegeben ist, entspricht die Reduktion von $\varphi(i, \varrho)$ auf $\varphi(i)$ der Annahme, daß an allen Stellen des Raumes die Sterne von gleicher Leuchtkraft in der gleichen Prozentzahl, wenn auch wegen der verschiedenen Dichte nicht in gleicher Anzahl vorkommen.

Hiergegen scheint nun die Beobachtung zu sprechen, daß die Sterne der früheren Spektraltypen gegenüber denen der späteren verhältnismäßig um so zahlreicher vorkommen, je näher sie an der Milchstraße stehen. Den früheren Typen kommt aber eine größere Flächenhelligkeit und daher im Durchschnitt eine größere Leuchtkraft zu. Bildet man von den Anzahlen der Sterne bis zur sechsten Größe, welche einem bestimmten Pickeringschen Typus angehören, die Quotienten für die galaktische Äquatorial- und Polarzone, so erhält man nach Pickering die Q_B der Tab. VII für die verschiedenen Typen T. Sie zeigen deutlich die genannte ungleichmäßige Verteilung. Es ist jedoch zu erwarten, daß sich diese mit den für φ und A gemachten Annahmen erhalten läßt. Die Bereiche, innerhalb welcher zwei Leuchtkräfte $i_1 > i_2$, die zu den Sternzahlen A_m Beiträge liefern, stehen können, sind zwei konzentrische Kugeln mit den Radien $\varrho_1 > \varrho_2$. In der Richtung der Polarzone A nimmt die Dichtigkeit A viel rascher ab als in der Zone E, indem etwa $A(E) : A(A) = \varrho^{-0{,}34} : \varrho^{-0{,}89}$ mit $\sqrt{\varrho}$ wächst. Die Verhältnisse aus den Anzahlen der Sterne einer bestimmten Leuchtkraft i_μ, $\mathfrak{A}(E, i_\mu) : \mathfrak{A}(A, i_\mu) = Q_\mu$ müssen darum für wachsende Leuchtkräfte i_μ ebenfalls wachsen, indem $Q_\mu = c \cdot \sqrt{\varrho_\mu}$ wird. In der Tat ergibt die Rechnung mit den Ansätzen für φ und A die in Tab. VII aufgeführten Q_R, welche mit den von Pickering beobachteten Werten nahe übereinstimmen. Sie werden dadurch erhalten, daß sich mit Hilfe der gemessenen Parallaxen die den einzelnen Typen zukommenden mittleren Leuchtkräfte ungefähr angeben lassen.

Eine andere Folge aus den Annahmen für φ und A ist die Abhängigkeit der mittleren Parallaxen π_m von der galaktischen Breite. Die Sterne der scheinbaren Größe h_m, deren mittlere Entfernungen zu bilden sind, liegen je nach ihrer Leuchtkraft auf verschiedenen konzentrischen Kugelschalen. Da nun am galaktischen Äquator die Dichtigkeit weit langsamer als am Pol abnimmt, so ist das Verhältnis für die Anzahlen der in der Milchstraße stehenden absolut hellen Sterne der äußeren Kugelschalen zu den gleichen am Pol befindlichen weit größer als das Verhältnis der näheren Sterne schwächerer Leuchtkraft am Äquator zu denen am Pol. Die mittlere Entfernung aller Sterne der Größe m

schiebt sich darum in der Richtung der Milchstraße weiter hinaus. Da für größere m auch die Entfernungen ϱ und damit die genannten Verhältnisse ständig wachsen, müssen die π_m mit wachsendem m am galaktischen Äquator und Pol stärker divergieren.

Die Berechnung der π_m mit φ und A ergibt die in Tab. VII aufgeführten Verhältnisse q_R der Parallaxen für die galaktische Polar- und Äquatorialzone, aus denen beispielsweise hervorgeht, daß die mittleren Entfernungen der Sterne 10. Größe in der Milchstraße 2,5 mal so groß sind als am Pol. Eine direkte Bestätigung durch die Beobachtung ist bisher nicht möglich, doch stimmen andere Beobachtungen mit diesen Ergebnissen überein. Wären nämlich die mittleren Eigenbewegungen der Sterne ihrer absoluten Größe nach in allen Zonen gleich, so müßten sie wegen der Verschiedenheit der Parallaxen an den Polen etwa doppelt so groß erscheinen als in der Milchstraße. Nach den Untersuchungen von Boss und Comstock ist dies für die Größen 6 und 9,5 der Fall.

Tabelle VII.

Verteilung der Spektraltypen, Parallaxen und Radialgeschwindigkeiten.

T	Q_B	Q_R	m	q_R	m	V_B	V_R
B	5:	1,70	5,0	1,9	2,1	11	11
A	1,25	1,30	9,0	2,1	5,1	13	12
FG	0,74	0,98	7,0	2,2	4,1	13	12
K	0,70	0,69	8,0	2,3	5,1	14	13
M	0,60	0,43	9,0	2,4	6,1	19	13
			10,0	2,5			

Während die Beträge der Eigenbewegung der Sterne mit wachsender Sterngröße abnehmen, was offenbar eine Folge ihrer zunehmenden mittleren Entfernung ist, hat die Beobachtung für die Radialgeschwindigkeiten das umgekehrte Verhalten erwiesen, wie aus den V_B der Tab. VII hervorgeht, die die Radialbewegungen in km/sec angeben. Dies steht mit der ebenfalls von W. W. Campbell beobachteten Tatsache in Zusammenhang, daß Sternen von vorgeschrittenem Spektraltyp im Durchschnitt größere Geschwindigkeiten im Visionsradius zukommen; was sich darauf zurückführen läßt, daß das Fortschreiten der Typen durch kleinere Massen begünstigt wird, daß aber geringeren Massen größere Geschwindigkeiten zukommen. Die Ansätze für φ und A ermöglichen nun, die Abhängigkeit $V(m)$ auf diese Veränderlichkeit $V(T)$ zurückzuführen. Infolge der Beziehung zwischen Typ und Leuchtkraft kann aus $V(T)$ nach der Beobachtung $V(i)$ ermittelt werden und hieraus läßt sich das Gesetz $V(m)$ in ähnlicher Weise wie die π_m nach (11) ableiten. Es ergeben sich die V_R der Tab. VII, welche nur für $m = 6{,}1$ von V_B erheblich abweichen. Das kann durch die geringe Zahl der hier für V_R verfügbaren Sterne verursacht sein. Weiterhin lassen sich noch ähnliche Betrachtungen wie für die Parallaxen anstellen, aus denen hervorgeht, daß die räumlichen Geschwindigkeiten der Sterne von der Größe m in der Milchstraße ihren kleinsten Wert erreichen und von da nach den Polen zu wachsen, sowie daß diese Unterschiede sich mit zunehmendem m vergrößern müssen.

Es genügt also für alle betrachteten Fälle durchaus, eine allerorts gültige Verteilungsfunktion der Leuchtkräfte anzunehmen. Dadurch können sowohl φ wie A in eindeutiger Weise erhalten werden. Diese Eindeutigkeit ist auch der Grund für die weitere Voraussetzung, daß $\varphi(i)$ bereits für ein endliches $i = H$ den Wert 0 erreicht. Sieht man dagegen Leuchtkräfte von beliebiger Größe als vorhanden an, so vereinfachen sich zwar die Ansätze für A_m und π_m. Die Integration würde in jedem Falle bis zur Grenze des Systems zu erstrecken sein, da die Sterne von einer bestimmten scheinbaren Helligkeit in allen Entfernungen stehen können; und für alle A_m und π_m bestände demnach nur je eine Integralgleichung. Die Lösung wird aber nicht eindeutig, denn es lassen sich unendlich viele Systeme von zusammengehörigen Werten für A, φ und r_1 finden, die den Gleichungen genügen. Unter der Annahme $r_1 = \infty$, die Schwarzschild verfolgt hat, wird der Verlauf von φ und A sehr ähnlich dem oben erhaltenen. Diese Voraussetzungen $H = \infty$ und $r_1 = \infty$ sind jedoch nur rechnungsmäßig zulässig, ihre Bedeutung liegt in der Vereinfachung der Aufgabe. Die Ansätze Seeligers passen sich den natürlichen Verhältnissen an. Sie gestatten nicht nur die Anordnung der Sterne in unserem Fixsternsystem, sondern auch dessen Begrenzung zu erkennen.

(Eingegangen 4. März 1918.)

BESPRECHUNGEN.

F. Kühnen, Das Mittelwasser der Ostsee bei Travemünde, Marienleuchte, Wismar, Warnemünde, Arkona, Swinemünde, Pillau, Memel und das Mittelwasser der Nordsee bei Bremerhaven in den Jahren 1898—1910. Lex. 8°. III u. 207 S. und zwei Tafeln. Veröffentlichung des Kgl. Preuß. Geodät. Instituts. Neue Folge Nr. 70. Berlin, P. Stankiewicz' Buchdruckerei. 1916. M. 9.—

Der Inhalt dieses starken Heftes bildet eine Fortsetzung der früher von Seibt und von Westphal bearbeiteten Aufzeichnungen der Wasserstände an der Küste der Ostsee, an den Pegeln zu Travemünde, Marienleuchte, Wismar, Warnemünde, Arkona, Swinemünde, Pillau und Memel. Zu diesem Material sind noch hinzugenommen die Beobachtungen der Wasserstände in Bremerhaven. Die Ablesungen sind an selbstregistrierenden Pegeln nach Seibtscher Konstruktion geschehen und umfassen etwas über ein Jahrzehnt. Bei der endgültigen Bearbeitung dieser Daten konnten noch die kurz nach der Fertigstellung der ersten Rechnung in einer eigenen Abhandlung publizierten Angaben von 10 Pegeln der dänischen Küste hinzugenommen werden. Dadurch wurde eine wesentliche Verschärfung der Resultate erzielt. Der Verf. gibt zunächst eine Beschreibung der Vorkehrungen, die für die Sicherung der Beziehungen zwischen den Nullpunkten der verschiedenen Pegel durch jährliche Nivellierung getroffen wurden, wodurch im wesentlichen die Konstanz derselben dargetan wird. Daran schließt sich das sehr umfangreiche, fast Dreiviertel des ganzen Heftes umfassende tabellarische Zahlenmaterial. Die sehr ausführlich behandelten mathematischen Grundlagen der Ausgleichung der einzelnen nach Monatsmitteln geordneten Pegelablesungen zeigen, daß die Ableitung aller wünschenswerten Konstanten für die Bewegung der Wasseroberfläche des Beobachtungsgebietes nicht gelingen kann, weil das in Betracht kommende Areal doch zu klein und daher die Abweichung der sphäroidischen Gestalt der Wasseroberfläche von der Kugel zu unbedeutend ist. Das schließlich gefundene, geophysikalisch interessante Resültat legt der Verf. etwa in folgenden Sätzen dar:

Die Lage des Mittelwassers hat bei allen Pegelstationen, abgesehen von unregelmäßigen Schwankungen, eine konstante Höhenlage. Die Veränderungen in der Höhe des jeweiligen Wasserstandes lassen sowohl eine jährliche als auch eine halbjährige Periode, die mit den Schwankungen des Luftdrucks zusammenhängt, erkennen. Der mittlere Wasserstand im Flächenschwerpunkt des durch die Pegelstationen definierten Areals — bei + 55° 13' und 29° 49' östlich von Paris — liegt 38,1 mm unter Normal-Null bei 760 mm Luftdruck, diesen als gleich hoch über dem ganzen Gebiet angenommen.

Die Wasseroberfläche steigt oder fällt um 10 mm, wenn der Barometerstand um 1 mm ab- bzw. zunimmt; was bis auf die überhaupt zu erlangende Genauigkeit dem Verhältnis zwischen der Dichte von Quecksilber zu dem des Wassers entspricht.

Außerdem fand sich, daß das Wasser in der Ostsee und Nordsee um rund 30 mm höher oder tiefer steht, je nachdem der Luftdruck bei den Aalandsinseln um 1 mm höher oder tiefer ist, als an dem oben näher bezeichneten Referenzpunkte. Dazu ergeben sich noch interessante Beziehungen zwischen dem Zu- und Abflusse des Wassers aus Nord- und Ostsee, die mit dem Unterschiede im spezifischen Gewicht des Wassers beider Gebiete zusammenhängt. Im ganzen zeigt aber die Bearbeitung des ganzen Materials, daß die von Windwirkung und den Eigentümlichkeiten der lokalen Verhältnisse abhängigen Schwankungen der Höhe des Wasserspiegels sehr erheblich die einzelnen Angaben der Pegel zu beeinflussen vermögen. L. Ambronn.

Tagesereignisse.

Preisaufgaben der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. Die Gesellschaft hat folgende mathematisch-physikalische Aufgaben gestellt:

1. Die Theorie der linearen Funktionaldifferentialgleichungen ist in irgendeiner Richtung zu fördern. Besonders wünschenswert wäre eine ganz durchgreifende Behandlung neuer Spezialfälle.
   Einlieferung bis zum 31. Oktober 1918; Preis 1500 M.
2. Übersicht und experimentelle Erweiterung der Erfahrungen über die Rolle leicht flüchtiger Bestandteile von Schmelzflüssen.
   Einlieferung bis zum 31. Oktober 1918; Preis 1500 M.
3. Es sind die Dielektrizitätskonstante und die lösenden und dissoziierenden Eigenschaften des flüssigen Fluorwasserstoffs zu untersuchen und die erhaltenen Resultate mit den bestehenden Theorien der elektrolytischen Dissoziation in Verbindung zu bringen.
   Einlieferung bis zum 31. Oktober 1919; Preis 1500 M.
4. Die Gesellschaft wünscht eine Übersicht der Leptonenkunde hinsichtlich ihrer Anwendung auf kristalline Materie und eine experimentelle Fortführung der einschlägigen Forschung mittels Röntgenstrahlen auf mineralogisch bedeutsame Stoffe.
   Einlieferung bis zum 31. Oktober 1920; Preis 1500 M.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor an der Böhmischen Universität Prag Dr. Emanuel Formanek zum ord. Professor der medizinischen Chemie und der Privatdozent an derselben Hochschule Dr. Anton Hamsik zum a. o. Professor der medizinischen Chemie an der Böhmischen Universität Prag, der Privatdozent der Mathematik an der Universität Wien Dr. Wilhelm Groß zum a. o. Professor ebenda, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen Dr. Paul Heegaard in gleicher Eigenschaft an der Universität Kristiania, speziell für Geometrie, der Privatdozent an der Universität Göttingen Dr. Horst v. Sanden zum ord. Professor der Mathematik und Mechanik an der Bergakademie Clausthal, der a. o. Professor an der Universität Basel Dr. Wilhelm Matthies zum ord. Professor der mathematischen Physik an derselben Hochschule, Dr. P. Harrer zum a. o. Professor für aromatische Chemie an der Universität Zürich.

Verliehen: Dem Abteilungsvorstand bei der Firma Carl Zeiß in Jena Dr. Otto Henker und dem Privatdozent für medizinische Chemie an der Böhmischen Universität Prag Dr. Karl Cerny der Titel Professor.

Gestorben: Der a. o. Professor für angewandte Physik an der Universität Jena Dr.-Ing. Karl Vollmer (als Fliegerleutnant gestürzt), der ord. Professor der Mathematik an der Nationaluniversität in Athen Dr. C. Stephanos, der ord. Professor für analytische Geometrie an der Universität Padua Dr. Giuseppe Veronese.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Fig. 4.

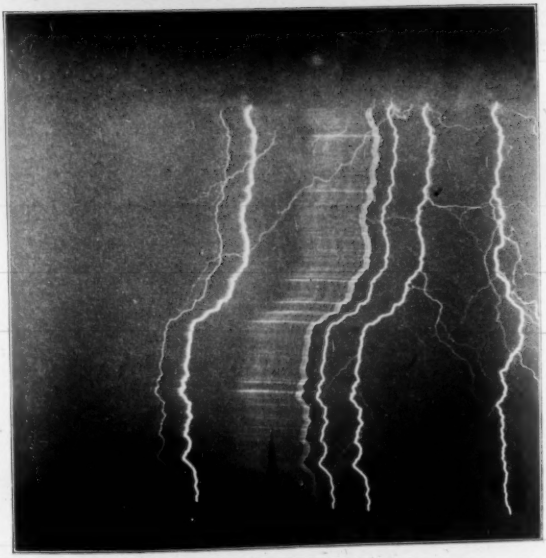

Fig. 5.

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen.)

	Seite
Akkumulatoren: Die — und galvanischen Elemente, v. L. Lucas. (B.)	320
Atombau und Röntgenspektren, v. A. Sommerfeld. I.	297
Atome: Der erste und zweite Elektronenring der —, v. J. Kroo	307
Bandenspektren: Über die Störungen in den Linienserien der —, v. T. Heurlinger	316
Eder, J. M., Johann Heinrich Schulze. (B.)	318
Elektronenring: Der erste und zweite — der Atome, v. J. Kroo	307
Eng: Die hydrodynamischen Grundlagen des —, v. R. Grammel. (B.)	319
Formatreform: Die Theorie der —, v. W. Porstmann	311
Galvanische Elemente: Die Akkumulatoren und —, v. L. Lucas. (B.)	320
Grammel, R., Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. (B.)	319
Heurlinger, T., Über die Störungen in den Linienserien der Bandenspektren	316
Hydrodynamische Grundlagen des Fluges: Die —, v. R. Grammel. (B.)	319
Kroo, J., Der erste und zweite Elektronenring der Atome	307
Linienserien: Über die Störungen in den — der Bandenspektren, v. T. Heurlinger	316
Lucas, L., Die Akkumulatoren und galvanischen Elemente. (B.)	320
Porstmann, W., Die Theorie der Formatreform	311
Röntgenspektren: Atombau und —, v. A. Sommerfeld. I.	297
Schulze: Johann Heinrich —, v. J. M. Eder. (B.)	318
Sommerfeld, A., Atombau und Röntgenspektren. I.	297

Jüngerer Assistent oder Assistentin

⟨Studierender der Physik oder Elektrotechnik⟩ zu möglichst sofortigem Antritt für unser Laboratorium gesucht. Die Tätigkeit bietet Gelegenheit zur Erwerbung umfangreicher, praktischer Kenntnisse. Schriftliche Offerten mit kurz gefaßtem Lebenslauf, Angabe bisheriger praktischer Tätigkeit und Studiengang erbeten an

Dr. Erich F. Huth G. m. b. H. Gesellschaft für Funkentelegraphie, **Berlin SW.,** Wilhelmstraße 130/132.

Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.